Задание:

- Повторить теорию;
- Разобрать примеры решения;
- Решить примеры для самостоятельного решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru
- Работу сдать после окончания карантина или при посещении практики

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА (2 занятия)

ТЕМА: Решение СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ КРАМЕРА И ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ.

ЦЕЛЬ: Формировать умение применять комплекс знаний с темы: "Элементы линейной алгебры" к решению задач и систематизировать теоретические знания.

Образцы решения задач

Решить систему уравнений методом Крамера, методом Гауса, сделать проверку.

$$\begin{cases} x1 - 2x2 - 8x3 = 10 \\ 2x1 + 5x2 + x3 = -1 \\ -3x1 + 5x2 + 8x3 = 18 \end{cases}$$

Решение

Метод Крамера.

Представим систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Находим определитель Δ, системы уравнений по правилу треугольника:

$\Delta=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ = 1·5·8+ (-8) ·2·5+(-3) ·1· (-2)-(-8) ·5· (-3)-1·1·5-8·2· (-2)=40-80+6-120- -5+32=-127

Находим Δ1, заменяя в Δ 1- и столбик столичком свободных членов:

$\Delta_1=\begin{bmatrix} 10 & -2 & -8 \\ -1 & 5 & 1 \\ 18 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ =10·5·8+(-8) · (-1) ·5+18·1· (-2)-(-8) ·5·18-10·1·5-8· (-1) · (-2)=

=400+40-36+720-50-16=1058

Находим Δ2, заменяя в Δ 2- и столбик столбиком свободных членов.

$\Delta_2=\begin{bmatrix} 1 & 10 & -8 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 18 & 8 \end{bmatrix}$ =1· (-1) ·8+(-8) ·2·18+(-3) ·1·10-(-8) · (-1) · (-3)-1·1·18-8·2·10=

=-8-288-30+24-18-160= - 480

Находим Δ3,заменяя в Δ 3- и столбик столбиком свободных членов:

$\Delta_3=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 5 & 18 \end{bmatrix}$ = 1·5·18+10·2·5+(-3)·(-1)·(-2)-10·5· (-3)-1· (-1)·5-18·2·(-2)=

=90+100-6+150+5+72=411

Находим значение сменных за формулами **Крамера:**

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$x_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{1058}{-127} = -\frac{1058}{127}$;

$x_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta} = \frac{-480}{-127} = \frac{480}{127}$;

$x_3 = \frac{\Delta 3}{\Delta} = \frac{411}{-127} = -\frac{411}{127}$;

Проверка

Подставляя в начальное уравнение значения полученных сменных, имеем:

$\frac{-1058}{127} - 2\cdot\frac{480}{127} - 8\cdot\left(-\frac{411}{127}\right) = 10$, - верное равенство;

$2\cdot\left(-\frac{1058}{127}\right) + 5\cdot\frac{480}{127} + \left(-\frac{411}{127}\right) = -1$, - верное равенство;

$-3\cdot\left(-\frac{1058}{127}\right) + 5\cdot\frac{480}{127} + 8\cdot\left(-\frac{411}{127}\right) = 18$, - верное равенство;

Поэтому систему уравнения развязаны верно.

Решить систему уравнений матричным методом и сделать проверку:

$$\begin{cases} -4x_1 + 26x_2 - 8x_3 = -9, \\ 3x_1 + 1x_2 - 4x_3 = 8, \\ 10x_1 - 49x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение

Замечание: для того,чтобы можно было решить систему уравнений матричным методом необходимо, чтобы определитель матрицы, составленный из коэффициентов при сменных, не равнялся нулю.

Составим матрицу A з коэффициентов при сменных, матрицу X со сменных, матрицу D из свободных членов и запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -4 & 26 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 10 & -49 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}; \ A\cdot X = D.$$

Находим определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{pmatrix} -4 & 26 & -8 \\ 3 & 1 & -4 \\ 10 & -49 & -4 \end{pmatrix} = (-4)\cdot 1\cdot(-4) + 10\cdot 26\cdot(-4) + 3\cdot(-49)\cdot(-8) - 10\cdot 1\cdot(-8) - 3\cdot 26\cdot(-4) - (-4)\cdot(-49)\cdot(-4) = 1328 \neq 0,$$

Тогда $X = A^{-1}\cdot D$, де A^{-1} – матрица, обратная к матрице A.

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} находим алгебраические дополнения элементов определителя матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -49 & -4 \end{pmatrix} = 1\cdot(-4) - (-49)\cdot(-4) = -4 - 196 = -200$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = -(3\cdot(-4) - 10\cdot(-4)) = -(-12 + 40) = -28$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 10 & -49 \end{pmatrix} = +(3\cdot(-49) - 10\cdot 1) = +(-147 - 10) = -157$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix}26 & -8\\ -49 & -4\end{pmatrix}=-\left(26\cdot(-4)-(-49)\cdot(-8)\right)=-\left(-104-392\right)=496$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{pmatrix}-4 & -8\\ 10 & -4\end{pmatrix}=+\left((-4)\cdot(-4)-10\cdot(-8)\right)=+\left(16+80\right)=96$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix}-4 & 26\\ 10 & -49\end{pmatrix}=-\left((-4)\cdot(-49)-10\cdot 26\right)=-\left(196-260\right)=64$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix}26 & -8\\ 1 & -4\end{pmatrix}=+\left(26\cdot(-4)-1\cdot(-8)\right)=+\left(-104+8\right)=-96$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{pmatrix}-4 & -8\\ 3 & -4\end{pmatrix}=-\left((-4)\cdot(-4)-3\cdot(-8)\right)=-\left(16+24\right)=-40$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix}-4 & 26\\ 3 & 1\end{pmatrix}=+\left((-4)\cdot 1-26\cdot 3\right)=+\left(-4-78\right)=-82$$

Записываем обратную матрицу за формулой: $A^{-1}=\dfrac{1}{\Delta A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$.

$$A^{-1}=\frac{1}{1328}\begin{pmatrix}-200 & 496 & -96\\ -28 & 96 & -40\\ -157 & 64 & -82\end{pmatrix}$$

Находим матрицу x, как результат умножения обратной матрицы A^{-1} и матрицы D, которая составлена из свободных членов системы уравнений:

$$X=A^{-1}\cdot D=\frac{1}{1328}\begin{pmatrix}-200 & 496 & -96\\ -28 & 96 & -40\\ -157 & 64 & -82\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-9\\ 8\\ 5\end{pmatrix}=\frac{1}{1328}\begin{pmatrix}-200\cdot(-9)+496\cdot 8+\left(-96\right)\cdot 5\\ -28\cdot(-9)+96\cdot 8-40\cdot 5\\ -157\cdot(-9)+64\cdot 8-82\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{1328}\begin{pmatrix}5288\\ 820\\ 1515\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{5288}{1328}\\ \dfrac{820}{1328}\\ \dfrac{1515}{1328}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{661}{166}\\ \dfrac{205}{332}\\ \dfrac{1515}{1328}\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{cases}x_1=\dfrac{661}{166}\\ x_2=\dfrac{205}{332}\\ x_3=\dfrac{1515}{1328}\end{cases}$

Проверка:

$$\begin{cases}-4\cdot\dfrac{661}{166}+26\cdot\dfrac{205}{332}-8\cdot\dfrac{1515}{1328}=\dfrac{-4\cdot 661\cdot 8+26\cdot 205\cdot 4-8\cdot 1515}{1328}=\dfrac{-11952}{1328}=-9,\\ 3\cdot\dfrac{661}{166}+1\cdot\dfrac{205}{332}-4\cdot\dfrac{1515}{1328}=\dfrac{3\cdot 661\cdot 8+1\cdot 205\cdot 4-4\cdot 1515}{1328}=\dfrac{10624}{1328}=8,\\ 10\cdot\dfrac{661}{166}-49\cdot\dfrac{205}{332}-4\cdot\dfrac{1515}{1328}=\dfrac{10\cdot 661\cdot 8-49\cdot 205\cdot 4-4\cdot 1515}{1328}=\dfrac{6640}{1328}=5.\end{cases}$$

Систему уравнения развязаны верно.

Ответ: $x_1 = \frac{661}{166}$; $x_2 = \frac{205}{332}$; $x_3 = \frac{1515}{1328}$.

ЗАДАЧА ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№ варианта	Решить систему линейных уравнений методом Крамера, сделать проверку	ответ	Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы, сделать проверку	ответы
1	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2; \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$	$-1{,}4$ $-2{,}2$ -1	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15; \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15; \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36 \end{cases}$	2 -1 1
2	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4; \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20; \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$	1 -1 1	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$	2 -1 0
3	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$	1 -2 3	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 7; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$	1 -1 3
4	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$	3 -1 1	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -3; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$	1 0 3
5	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 8 \end{cases}$	2 1 1	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3; \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$	1 -1 2
6	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x - x_2 + 3x_3 = 4; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$	1,5 -1 0,5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 = -9 \end{cases}$	-1 2 0
7	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -4; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$	$2/3$ $5/3$ -1	$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	1 1 1
8	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$	-1 -1 -1	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ -3x_1 + x_2 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$	3 $10/3$ $1/3$
9	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	0 0 0	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$	1 1 1
10	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -3 \end{cases}$	2 1 -2	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$	-3 2 1

11	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2; \\ 2x_1+x_2=3; \\ 3x_1+x_2+x_3=5 \end{cases}$	1 1 1	$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=11; \\ -2x_1+x_2+x_3=-6; \\ x_1-2x_2-3x_3=5 \end{cases}$	2 -3 1
12	$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=1; \\ 3x_1+6x_2-2x_3=-2; \\ 2x_1+2x_2-x_3=-2 \end{cases}$	-1 0,5 1	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8; \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5; \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10 \end{cases}$	$\approx 2{,}5$ $\approx -4{,}4$ $\approx 0{,}6$
13	$\begin{cases} 2x_2+3x_3=2; \\ x_1-x_2+2x_3=1; \\ x_1+x_2+3x_3=2 \end{cases}$	0,25 0,25 1	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8; \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5; \\ 3x_1-4x_2+5x_3=1 \end{cases}$	$85/4$ $-1/4$ $-51/4$
14	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; \\ x_1-x_2+2x_3=-5; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$	1 2 -2	$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0; \\ 3x_1+4x_2+6x_3=0; \\ x_1+x_3=1 \end{cases}$	$2/3$ -1 $1/3$
15	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2; \\ 5x_1+x_2+3x_3=14; \\ 2x_1+x_2+2x_3=5 \end{cases}$	2 -5 3	$\begin{cases} -2x_1+x_2+6x_3=2; \\ x_1-2x_2-x_3=5; \\ 3x_1-4x_2-2x_3=13 \end{cases}$	3 $\approx -1{,}8$ $\approx 1{,}6$
16	$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=5; \\ -3x_1+x_2+x_3=2; \\ x_1-2x_2+3x_3=1 \end{cases}$	-3 -5 -2	$\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15; \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15; \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36 \end{cases}$	2 -1 1
17	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6; \\ 5x_1+3x_2+2x_3=2; \\ x_1+5x_2+3x_3=-2 \end{cases}$	2 16 -28	$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=4; \\ x_1-3x_2+2x_3=5; \\ 2x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$	2 -1 0
18	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=6; \\ 2x_1+3x_2+2x_3=2; \\ x_1+5x_2+3x_3=-2 \end{cases}$	2 -2 2	$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=7; \\ x_1+2x_2+3x_3=8; \\ x_1+x_2+2x_3=6 \end{cases}$	1 -1 3
19	$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=5; \\ 2x_1+x_2+x_3=6; \\ x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$	3 -1 1	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=5; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=-3; \\ x_1-3x_2+x_3=4 \end{cases}$	1 0 3
20	$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4; \\ x_1+2x_2+3x_3=7; \\ x_1+x_2+5x_3=8 \end{cases}$	2 1 1	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=-3; \\ -3x_1+4x_2+x_3=1; \\ 5x_1+x_2-3x_3=-2 \end{cases}$	1 -1 2

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Что называют системой n линейных уравнений с n неизвестными?
2. Какие особенности применения метода Крамера?
3. Какие особенности применения метода обратной матрицы?
4. В чем суть метода:
   - Крамера;
   - методом обратной матрицы.