Уважаемые студенты!

Задание:

1. Прочтите приведенный ниже конспект лекции.
2. Напишите конспект лекции в тетрадь.
3. Конспект лекции и творческое задание предоставить на электронную почту в течение трех дней.

Минимизация автоматов

Цель. Показать, что для каждого регулярного множества однозначно находится конечный автомат с минимальным числом состояний.

По данному конечному автомату M можно найти наименьший эквивалентный ему конечный автомат, исключив все недостижимые состояния и затем склеив лишнее состояние. Лишнее состояние определяется с помощью разбиения множества всех состояний на классы эквивалентности так, что каждый класс содержит неразличимые состояния и выбирается как можно шире. Потом из каждого класса берётся один представитель в качестве состояния сокращенного (или приведённого) автомата.

Таким образом можно сократить объём автомата M, если M содержит недостижимые состояния или два или более неразличимые состояния. Полученный автомат будет наименьший из конечных автоматов, распознающий регулярное множество, определяемое первоначальным автоматом M.

Определение.

Пусть $M = (Q, q_0, F)$ конечный автомат, а q_1 и q_2 два его различные состояния. Будем говорить, что цепочка x различает состояния q_1 и q_2, если $(q_1, x)\vdash^{?}(q_3, e)$, $(q_2, x)\vdash^{?}(q_4, e)$ и одно из состояний q_3 и q_4 принадлежит F. Будем говорить, что q_1 и q_2 k- неразличимы, и писать $q_1 q_2$, если не существует такой

цепочки x, различающей q_1 и q_2, у которой $|x|k$. Будем говорить, что состояния q_1 и q_2, неразличимы и писать $q_1?q_2$, если они k - неразличимы для любого $k0$.

Состояние qQ называется недостижимым, если не существует такой входной цепочки x, что $(q_0, x)?^?(q, e)$.

Автомат M называется приведенным, если в Q нет недостижимых состояний и нет двух неразличимых состояний.

Пример. Рассмотрим конечный автомат M с диаграммой (рис. 1).

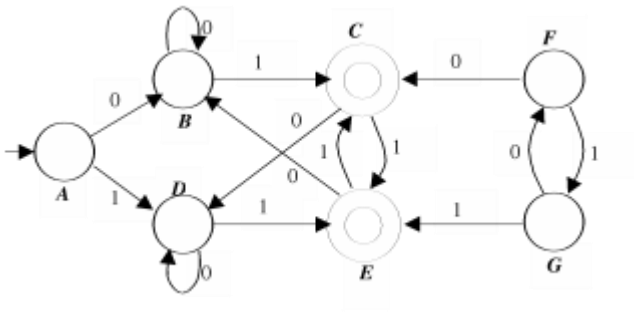

Рисунок 1 – **Диаграмма автомата *M***

Чтобы сократить M, заметим сначала, что состояния F и G недостижимы из начального состояния A, так что их можно устранить. Пока качественно, а позже строго мы установим, что классами эквивалентности отношений являются $\{A\}$, $\{B, D\}$ и $\{C, E\}$. Тогда, взяв представителями этих множеств p, q и r, можно получить конечный автомат вида (рис. 2).

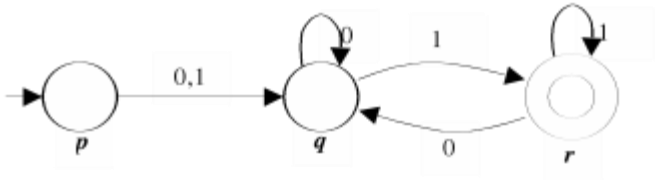

Рисунок 2 – **Приведенный конечный автомат**

Перед тем, как построить алгоритм канонического конечного автомата, введём лемму:

Лемма.

Пусть $M = (Q, q_0, F)$ конечный автомат с n состояниями. Состояния q_1 и q_2 неразличимы тогда и только тогда, когда они $(n\text{-}2)$ - неразличимы, т.е. если

два состояния можно различить, то их можно различить с помощью входной цепочки, длина которой меньше числа состояний автомата.

Алгоритм построения канонического конечного автомата.

Вход.

Конечный автомат $M = (Q, q_0, F)$.

Выход.

Эквивалентный конечный автомат M'.

Метод.

Шаг 1. Применив к диаграмме автомата ^M алгоритм нахождения множества вершин, достижимых из данной вершины ориентированного графа, найти состояния достижимые из q_0. Установить все недостижимые состояния.

Шаг 2. Строить отношения эквивалентности $?^0$, $?^1$ по схеме:

- 1. q_1 $?^0$ q_2 тогда и только тогда, когда они оба принадлежат, либо оба не принадлежат F;
- 2. q_1 q_2 тогда и только тогда, когда q_1 q_2 и (q_1, a) (q_2, a) для всех a.

Шаг 3. Построить конечный автомат

$M'=(Q', ' q_0', F')$,

где Q' - множество классов эквивалентности отношений ? (обозначим через $[p]$ класс эквивалентности отношений, содержащий состояние p);

$('[p], a) = [q]$, если $(p, a) = q$;

q_0' - это $[q_0]$;

F' - $\{[q] \mid qF\}$.

Теорема.

Автомат M', построенный по данному алгоритму имеет наименьшее число состояний среди всех конечных автоматов, допускающих язык $L(M)$.

Пример.

Найдём приведённый конечный автомат автомату M (рис. 3).

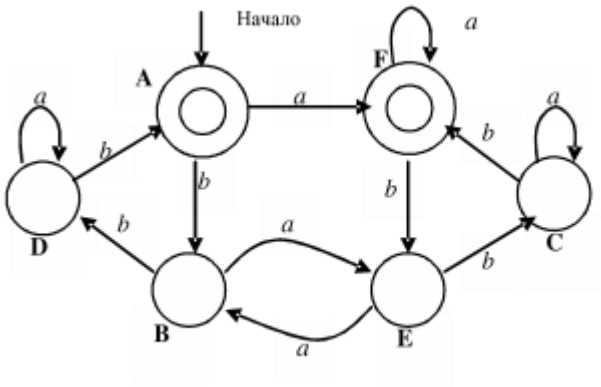

Рисунок 3 – **Диаграмма автомата *M***

Отношения для $\kappa 0$ имеют следующие классы эквивалентности:

класс отношения $?^0$ {A, F}, {B, C, D, E};

класс отношения $?^1$ {A, F}, {B, E}, {C, D};

класс отношения $?^2$ {A,F}, {B,E}, {C,D}.

Так как $?^2 = ?^1$, то $? = ?^1$.Приведённый автомат *M′* будет ({[A],[B], [C], {*a*, *b*}, ', A, {[A]}}), где ' определяется следующей таблицей.

Таблица 3.4 - Приведенный конечный автомат

Состояние	*a*	*b*
[A]	[A]	[B]
[B]	[B]	[C]
[C]	[C]	[A]

[A] - выбрано для представления класса {A, F};

[B] - выбрано для представления класса {B, E};

[C] - выбрано для представления класса {C, D}.