Задание

1. Изучить материал лекции, законспектировать, записать решение типовых задач, ответить письменно на контрольные вопросы.
2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311. Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Элементы теории графов»

Цель: рассмотреть применение графов в теории вероятностей.

План

1. **Теория графов**
2. **Вероятностный граф**
3. **Правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу**

Теория графов

Графы оказались хорошей математической моделью широкого класса объектов и процессов. Теория графов применяется в таких областях, как физика, химия, теория связи, проектирование ЭВМ, электроника, машиностроение, архитектура, исследование операций, генетика, психология, социология, экономика, антропология и лингвистика. При этом обычно на графе решаются задачи о достижимости, задачи сетевого планирования, потоковая задача.

Первой работой теории графов как математической дисциплины считают статью Эйлера (1736 г.), в которой рассматривалась задача о Кёнингсбергских мостах. Эйлер показал, что нельзя обойти семь городских мостов и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Следующий импульс теория графов получила спустя почти 100 лет с развитием исследований по электрическим сетям, кристаллографии, органической химии и другим наукам.

Определение. Графом называется два множества с отношением инцидентности между их элементами, называемыми вершинами и ребрами. Любое ребро связано не более чем с двумя вершинами.

Неформально граф можно рассматривать как множество точек и соединяющих эти точки линий со стрелками или без них.

С графами, сами того не замечая, мы сталкиваемся постоянно. Например, графом является схема линий метрополитена. Точками на ней представлены станции, а линиями – пути движения поездов. Исследуя свою родословную и возводя ее к далекому предку, мы строим так называемое генеалогическое древо. И это древо – граф.

Определение. Деревом называется связный граф без циклов. Очень важное понятие для подхода изложения теории вероятностей. При помощи дерева удобно изображать исходы того или иного испытания.

Графы служат удобным средством описания связей между объектами.

Имеется две основные разновидности графов: неориентированные и ориентированные. Неориентированный граф – совокупность точек (вершин графа) с соединяющими некоторые из них отрезками (ребрами графа; ветвями). Ориентированный граф – это совокупность точек (вершин) с соединяющими некоторые из них ориентированными отрезками (стрелками). В этой работе мы будем пользоваться только ориентированными графами.

При изображении графов на рисунках чаще всего используется следующая система обозначений: вершины графа изображаются точками или, при конкретизации смысла вершины, прямоугольниками, овалами и др., где внутри фигуры раскрывается смысл вершины (графы блок-схем алгоритмов). Если между вершинами существует ребро, то соответствующие точки (фигуры) соединяются линией или дугой. В случае ориентированного графа дуги заменяют стрелками, или явно указывают направленность ребра. Иногда рядом с ребром размещают поясняющие надписи, раскрывающие смысл ребра, например, в графах переходов конечных автоматов. Различают планарные и непланарные графы. Планарный граф — это граф, который

можно изобразить на рисунке (плоскости) без пересечения рёбер (простейшие — треугольник или пара связанных вершин), иначе граф непланарный. В том случае, если граф не содержит циклов (содержащих, по крайней мере, один путь однократного обхода рёбер и вершин с возвратом в исходную вершину), его принято называть «деревом». Важные виды деревьев в теории графов — бинарные деревья, где каждая вершина имеет одно входящее ребро и ровно два выходящих, или является конечной — не имеющей выходящих рёбер и содержит одну корневую вершину, в которую нет входящего ребра.

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление. Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет. Часто на практике бывает трудно ответить на вопрос, являются ли два изображения моделями одного и того же графа или нет (другими словами, изоморфны ли соответствующие изображениям графы). В зависимости от задачи, одни изображения могут давать более наглядную картину, чем другие.

Но граф используют отнюдь не только как иллюстрацию. Например, рассматривая граф, изображающий сеть дорог между населенными пунктами, можно определить маршрут проезда от пункта А до пункта Б. Если таких маршрутов окажется несколько, хотелось бы выбрать в определенном смысле оптимальный, например самый короткий или самый безопасный. Для решения задачи выбора требуется проводить определенные вычисления над графами. При решении подобных задач удобно использовать алгебраическую технику, да и само понятие графа необходимо формализовать.

Методы теории графов широко применяются в дискретной математике. Без них невозможно обойтись при анализе и синтезе различных дискретных преобразователей: функциональных блоков компьютеров, комплексов программ и т.д.

Вероятностный граф.

Определение. Граф называется **вероятностным**, если рядом с каждым его ребром записать соответствующую вероятность.

Это общий термин для обозначения вероятностного распределения графов. Вероятностные графы можно описать просто распределением вероятности или случайным процессом, создающим эти графы. Теория случайных графов находится на стыке теории графов и теории вероятностей. С математической точки зрения случайные графы необходимы для ответа на вопрос о свойствах типичных графов. Вероятностные графы нашли практическое применение во всех областях, где нужно смоделировать сложные сети – известно большое число случайных моделей графов, отражающих разнообразные типы сложных сетей в различных областях. В математическом контексте термин случайный граф означает почти всегда модель случайных графов Эрдёш-Реньи.

Правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу:

1) вероятность попадания в конечную вершину (вероятность исхода) можно вычислить, перемножая вероятности, встречаемые на ребрах соответствующего маршрута (рисунок 1, жирный маршрут);

$\mathbf{P(A)=p_1*q_3*r_2}$

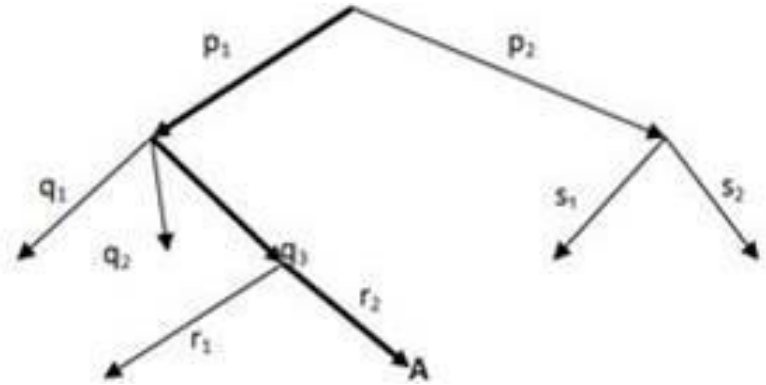

Рисунок 1 – Вероятность попадания в одну конечную вершину

2) если же нас интересует вероятность события, которому благоприятствуют несколько исходов, то вероятности соответствующих конечных вершин складываются (рис.1.2, жирные маршруты).

$\mathbf{P(B)=p_1*q_2+p_2*r_1}$

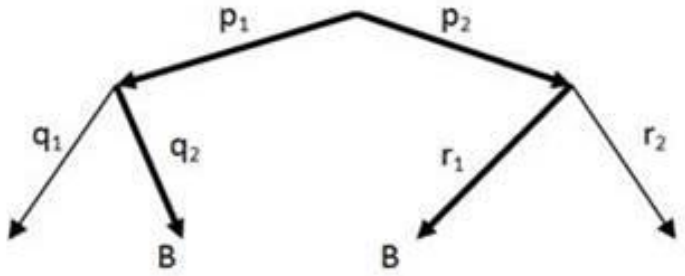

Рисунок 2 – Вероятность попадания в несколько вершин

Пример 1. В каждой из трех групп по 25 студентов. Число студентов группы, сдавших экзамен по математике, равно 22, 20 и 18 соответственно. Какова вероятность, что случайно выбранный студент сдал экзамен по математике?

Решение: Построим размеченный вероятностный граф (рисунок 3):

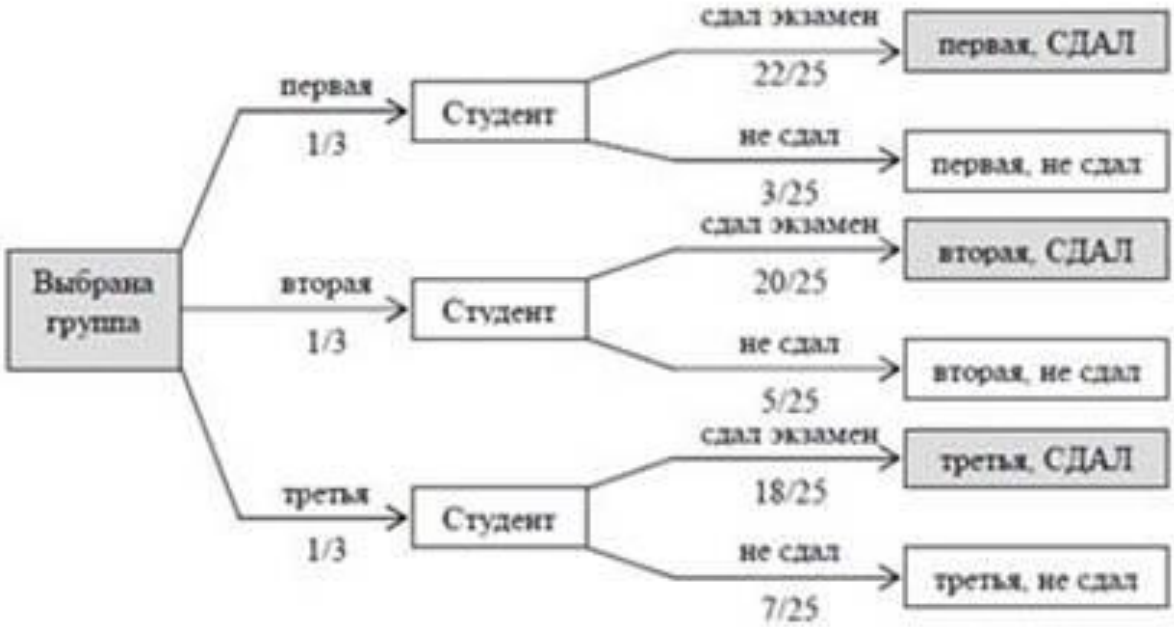

Рисунок 3 – Вероятность сдачи экзамена студентами разных групп

Обозначим через А событие, заключающееся в том, что случайно выбранный студент сдал экзамен. Этому событию на графе благоприятствуют три маршрута. Поэтому:

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{25}=\frac{22+20+18}{3\cdot 25}=\frac{60}{3\cdot 25}=\frac{5\cdot 15}{3\cdot 25}=\frac{4}{5}.$$

Пример 2. Студент пришел на экзамен, зная 25 из 30 билетов. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если после отказа отвечать на билет ему предоставляется возможность вытянуть еще один?

Решение: Построим размеченный вероятностный граф (рисунок 4):

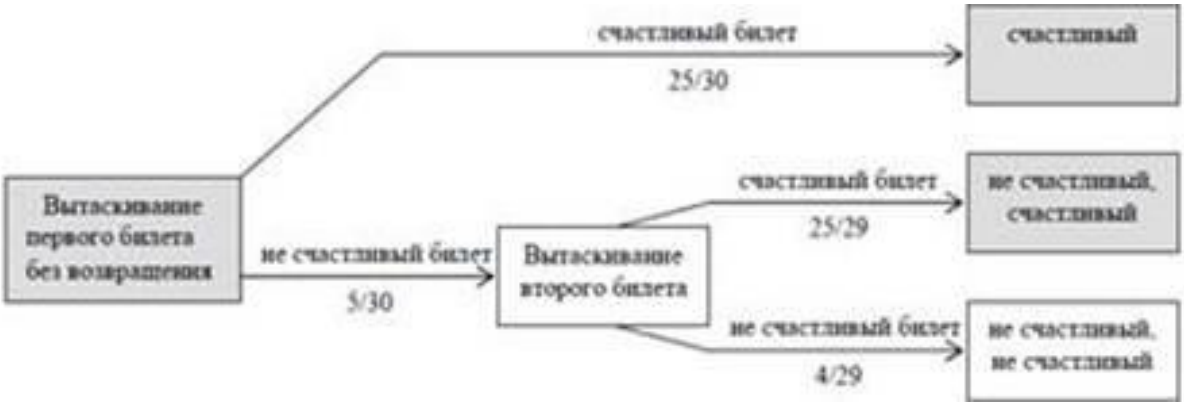

Рисунок 4 – Вероятность сдачи экзамена студентом

Обозначим через А событие, состоящее в том, что студент сдал экзамен. На графе вероятностей этому событию благоприятствуют два маршрута. Следовательно:

$$P(A)=\frac{25}{30}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}=\frac{25}{30}\left(1+\frac{5}{29}\right)=\frac{25}{30}\cdot\frac{34}{29}=\frac{85}{87}.$$

Пример 3. В первой урне находятся 7 белых и 9 черных шаров, во второй - 6 белых и 4 черных шаров. Из первой урны во вторую переложили два шара, а затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение: Построим размеченный вероятностный граф (рисунок 5):

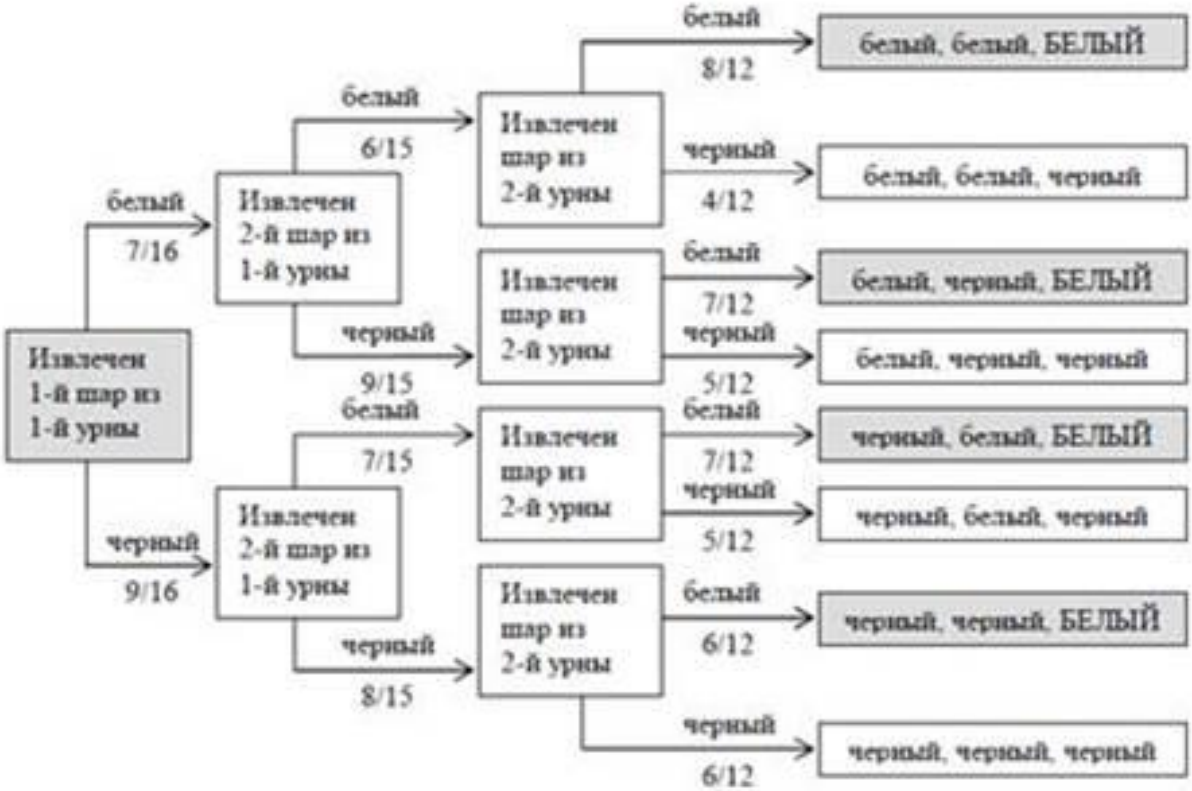

Рисунок 5 – Вероятность вынуть белый шар

Пусть событие А - извлеченный из второй урны шар оказался белым. Этому событию на графе благоприятствуют четыре маршрута. Поэтому:

$$P(A)=\frac{7}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{8}{12}+\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{7}{12}+\frac{9}{16}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{7}{12}+\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{6}{12}=\frac{55}{96}$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется графом?
2. Какие бывают графы?
3. Что такое вероятностный граф? Чем отличается вероятностный граф от других графов?
4. По какому алгоритму решают задачи теории вероятностей с использованием вероятностных графов?