УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ!

Повторите изученный теоретический материал, решите задачи для самостоятельной работы

Результаты работы, фотоотчет, предоставить преподавателю на e-mail:

hvastov@rambler.ru в трехдневный срок с момента получения задания.

При возникновении вопросов по приведенному материалу

обращаться по следующим номерам телефонов: 0721098278

ВНИМАНИЕ!!! При отправке работы, не забывайте указывать ФИО студента, наименование дисциплины, дата проведения занятия (по расписанию).

Практическое занятие

Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей

Цель: закрепить умение применять определенный интеграл для решения физических задач и площадей криволинейных трапеций, развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

Оборудование: тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы.

Указание. Практическая работа состоит из двух частей – теоретической и практической (задания для самостоятельного выполнения). После изучения теоретического материала можно приступать к выполнению практической части.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотрите теоретический материал по теме и примеры решения задач (приведены ниже).
2. Решите самостоятельную работу. Оформите решение письменно в тетради.

Ход работы.

Теоретический материал.

Таблица интегралов.

1) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, при $n \neq -1$; **2)** $\int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u\sqrt{u} + C$;

3) $\int du = u + C$; **4)** $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$; **5)** $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;

6) $\int \cos u\, du = \sin u + C$; **7)** $\int \sin u\, du = -\cos u + C$;

8) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$; **9)** $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$;

10) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$; **11)** $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C$;

12) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$; **13)** $\int e^u du = e^u + C$; **14)** $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит **формула Ньютона – Лейбница:**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Определенный интеграл используется в физике и технике для решения различных задач.

Определение. **Криволинейной трапецией (Рисунок 1) называют фигуру, которая ограничена:**

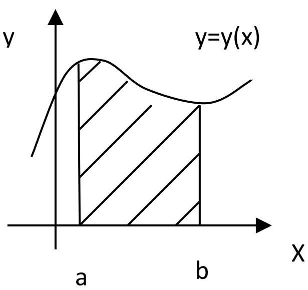


Рисунок 1

– **сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)***
– **снизу – осью OX (*y=0*)**
– **слева – прямой *x=a***
– **справа – прямой *x=b***

Утверждение. **Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:**

$$S = \int_a^b y(x)dx \qquad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2$, x=-1, x=2 и осью OX.

Решение: данная фигура (см. рисунок 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

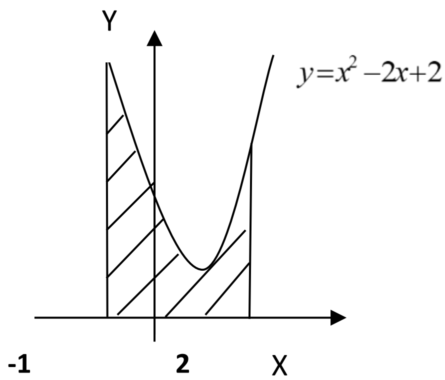


Рисунок 2

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{2} - \left.x^2\right|_{-1}^{2} + \left.2x\right|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - \left(2^2 - (-1)^2\right) + \left(2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)\right) =$$

$$= 3 - 3 + 6 = 6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть y=f(x) – непрерывная функция при x$\in$[a, b], график которой расположен ниже оси OX (см. рисунок 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

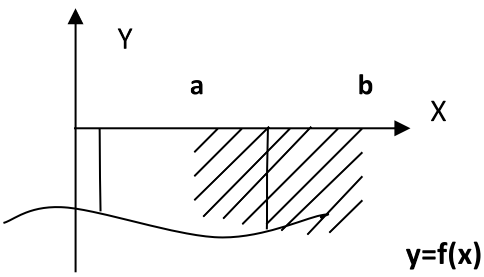


Рисунок 3

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \quad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 5x + 6$ и осью OX.

Решение: данная фигура (Рисунок 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

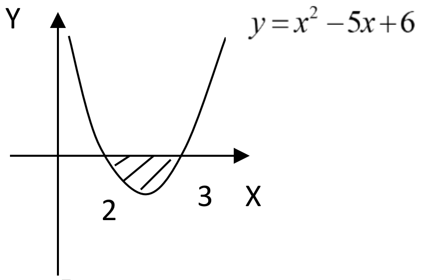


Рисунок 4

$$S = \left|\int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx\right| = \left|\frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - \frac{5x^2}{2}\Big|_2^3 + 6x\Big|_2^3\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{5\cdot 3^2}{2} - \frac{5\cdot 2^2}{2}\right) + (6\cdot 3 - 6\cdot 2)\right| =$$

$$= \left|\frac{19}{3} - \frac{25}{2} + 6\right| = \left|\frac{38 - 75 + 36}{6}\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$.

Решение: данная фигура (Рисунок 5)представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x_1=-2 и x_2=1.

$S = \int_{-2}^{1}(-x+3)dx - \int_{-2}^{1}(x^2+1)dx$. Можно записать под один интеграл:

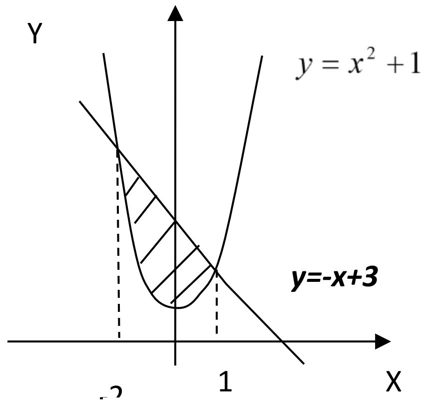


Рисунок 5

$$S = \int_{-2}^{1}\left(-x + 3 - (x^2 + 1)\right)dx = \int_{-2}^{1}\left(2 - x - x^2\right)dx =$$

$$= 2x\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} = (2\cdot 1 - 2\cdot(-2)) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) -$$

$$-\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 6 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 3 = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$и $y = -x + 3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (Рисунок 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций S=S_1+S_2, где $S_1 = \int_0^1 (x^2 + 1)dx$ и $S_2 = \int_1^3 (-x + 3)dx$. Получим формулу:

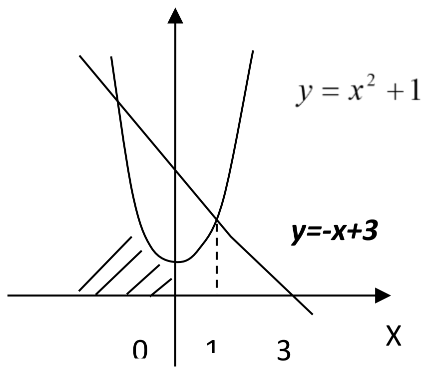


Рисунок 6

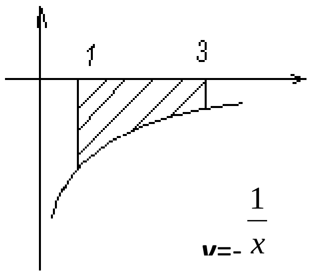
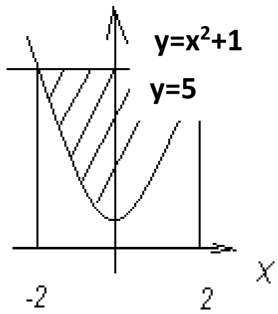
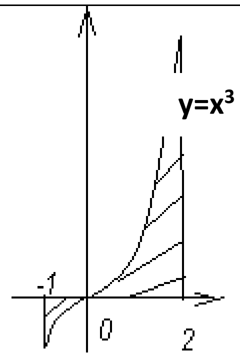
$$S=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx+\int_1^3\left(-x+3\right)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.x\right|_0^1-\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3+\left.3x\right|_1^3=$$

$$=\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+\left(1-0\right)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^3}{2}\right)+\left(3\cdot 3-3\cdot 1\right)=$$

$$=\frac{1}{3}+1-4+6=3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ кв.ед.

Проверьте себя

№1	№2	№3
		

Ответы: №1 ln3 кв.ед., №2 $10\frac{2}{3}$ кв.ед., №3 $4\frac{1}{4}$ кв.ед.

Пример 5. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,08 м, если для её сжатия на 0,01 м требуется сила 10 Н.

Решение. По закону Гука сила F пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т.е. F=kx, где x- величина растяжения или сжатия (в м), k-постоянная. Из условия задачи находим k=$\frac{F}{x}$ =$\frac{10}{0{,}01}$ =1000, следовательно, F(x)= kx=1000x.

Работа силы F(x) при перемещении тела из точки *а* в точку *в* равна A=$\int_a^в F(x)dx$. Используя данные задачи , получаем

A=$\int_0^{0,08} 1000x dx$.=1000 $\frac{x^2}{2}\,|_0^{0,08}$ = 500((0,08)^2-0)=3,2 (Дж)

Пример 2. Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону ρ(l)=16 l+24 (плотность измеряется в кг/м). Найдите массу стержня, если его длина равна 20см.

Решение. Исходя из физического смысла определенного интеграла, массу стержня можно вычислить по формуле: m=$\int_{а}^{в} \rho(l)\mathrm{d}\, l$. В нашем случае

m=$\int_0^{0.02}(16l + 24)\mathrm{d}\, l$= (8 l^2+24 l)$|_0^{0,02}$=8*0,02^2+24*0,02-0=0,4832 (кг.)

Пример 3. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Так как путь, пройденный телом со скоростью υ(t) за отрезок времени [t_1,t_2], выражается интегралом

$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dy$, то имеем: $S = \int_0^5 (2t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3)\Big|_0^5 = 150$ (м).

Задания для самостоятельного решения:

1. Найдите расстояние, пройденное материальной точкой за 2 с. от начала движения, если скорость задана формулой v(t)=2t^3- 4t^2+2 .

2. Точка движется вдоль прямой со скоростью v(t)=2+$\frac{1}{\sqrt{t+2}}$.. Найдите путь пройденный точкой в промежуток времени [2; 7]

3. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением v=24t- 6t^2, м/с. Вычислить: путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 6 см, если для растяжения ее на 1см нужно приложить силу в 10 Н.

5. Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону ρ(l)=8 l+1 (плотность измеряется в кг/м). Найдите массу стержня, если его длина равна 50см.