Уважаемые студенты.

Вам необходимо ознакомиться с теоретическим материалом темы, рассмотреть решение примеров и выполнить самостоятельную работу.

Электронная почта: *hvastov@rambler.ru*

Лекция

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами со специальной правой частью:

$$y'' + py' + qy = f(x)\ , \qquad (p,\ q - const) \qquad (1)$$

Общее решение уравнения (1)

$$y_{он} = y_{оо} + y_{ч}\ ,$$

где $y_{оо}$ - общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

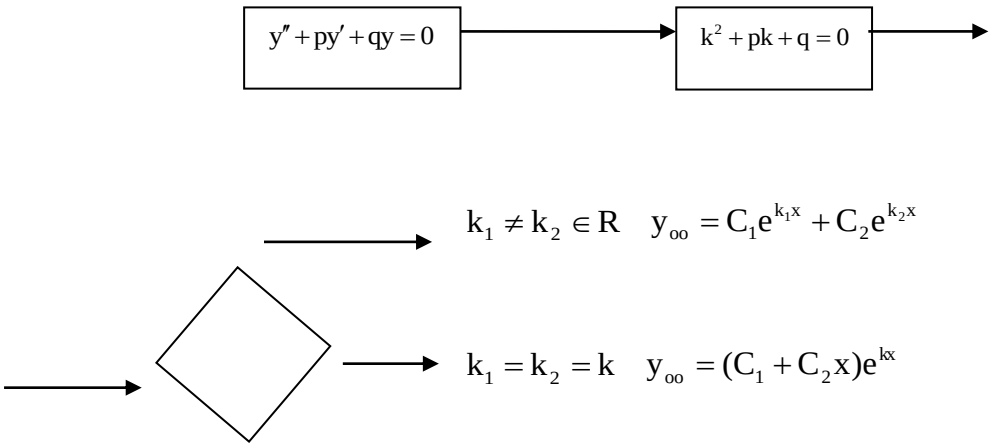
$$y'' + py' + qy = 0,$$

$y_{ч}$ - некоторые частные решения уравнения (1).

а) Рассмотрим решение ЛОДУ

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2)$$

Схема решения (2):



$$\longrightarrow \quad k_{1,2} = \alpha + i\beta \quad y_{oo} = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) \quad (5)$$

Пример 1. Найти общее решение уравнений:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$;

б) $y'' + 2y' + y = 0$;

в) $y'' + 2y' + 10y = 0$.

<u>Решение.</u>

а) составим характеристическое уравнение:

$$k_2 - 4k + 3 = 0.$$

его корни $k_1 = 3,\ k_2 = 2,\ k_1 \neq k_2$ (1-ый случай). Общее решение исходного дифференциального уравнения будет согласно (3)

$$y_{oo} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}.$$

б) Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 1 = 0, \qquad k_1 = k_2 = -1 \qquad \text{(2-ой случай).}$$

Общее решение согласно (4) будет

$$y_{oo} = (C_1 + C_2 x)e^{-x} = e^{-x}(C_1 + xC_2).$$

в) Составим и решим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k + 10 = 0, \qquad k_{1,2} = 1 + 3i \qquad \text{(3-ий случай).}$$

Общее решение согласно (5) будет

$$y_{oo} = e^{x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

б) <u>Решение ЛНДУ</u>. Рассмотрим метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов). Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда его правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]. \qquad (6)$$

В этом случае частное решение ЛНДУ 2-го порядка

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

следует искать в виде

$$y_{ч} = x^{r} e^{\alpha x}\left[P_k(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x\right]. \qquad (7)$$

Здесь r равно числу совпадений контрольного числа $z=\alpha+i\beta$ с корнями характеристического уравнения (α - показатель экспоненты, β - коэффициент при x в тригонометрических функциях $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$). $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ - полные многочлены от x с неопределенными коэффициентами, причем k равно наибольшему из чисел m и n в (6), при этом если в $f(x)$ входит может быть одна из функций $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$, то в (7) надо всегда вводить обе функции $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$.

Частными случаями функции $f(x)$ рассматриваемой структуры являются следующие функции:

1. $f(x)=Ae^{\alpha x}$, A- постоянная, $z=\alpha+i\beta\equiv\alpha$;
2. $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, A, B - постоянные, $z=\alpha+i\beta\equiv\beta i$;
3. $f(x)=P_n(x)$ (многочлен степени n), $z=\alpha+i\beta\equiv 0$;
4. $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, $z=\alpha+i\beta\equiv\alpha$;
5. $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$, $z=\alpha+i\beta\equiv\beta i$;
6. $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, $z=\alpha+i\beta$.

Если правая часть исходного уравнения равна сумме нескольких различных функций рассматриваемой структуры (6), то для отыскания частного решения надо найти частные решения, соответствующие отдельным слагаемым правой части, и взять их сумму, которая и является частным решением исходного уравнения. Например,

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x),$$

тогда $y_ч=y_{ч1}+y_{ч2}$, где $y_{чi}$ - частные решения уравнений

$$y''+py'+qy=f_i \quad (i=1,2).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y''+y'=x^2e^x.$$

<u>Решение.</u>

а) $y''+y'=0$ - ЛОДУ. Составим характеристическое уравнение $k^2+k=0$. Его корни

$k_1=0,\ k_2=-1$. Тогда $y_{oo}=C_1+C_2e^{-x}$.

б) Составим по правой части $f=x^2e^x$ контрольное число $z=\alpha+i\beta$. Показатель экспоненты α равен 1. Функций $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$ $f(x)$ не содержит. Итак, контрольное число z будет равно 1. Следовательно, число совпадений $r=0$ (т.к. совпадений $z=1$ с корнями характеристического уравнения нет). Тогда частное решение будем искать в виде

$$y_ч=P_2(x)e^x=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^x.$$

Дифференцируем $y_г$:

$$y'_ч = e^x(2Ax + B) + e^x(Ax^2 + Bx + C) = e^x\left[Ax^2 + (B + 2A)x + (C + B)\right].$$

Аналогично найдем

$$y''_ч = e^x\left[Ax^2 + (B^2 + 4A)x + (C + 2B + 2A)\right].$$

Подставляя $y_ч$, $y'_ч$, $y''_ч$ в исходное уравнение, получим

$$e^x\left[2Ax^2 + (2B + 6A)x + 2C + 3B + 2A\right] = e^x x^2.$$

Это равенство выполняется при всех значениях x, а значит, коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства совпадают. Приравнивая эти коэффициенты, получаем:

$$x^2:\ 2A = 1,\ A = \frac{1}{2}.$$

$$x^1:\ 2B + 6A = 0,\ B = -\frac{3}{2}.$$

$$x^0:\ 2C + 3B + 2A = 0,\ C = \frac{7}{4}.$$

Таким образом,

$$y_г = e^x\left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right).$$

Пример 3. Составить вид частного решения следующих дифференциальных уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{2x}$;

б) $y'' + y' - 2y = x^2\cos x - 3\sin x$;

в) $y'' + y = 3\sin x$.

<u>Решение.</u>

а) Так как $k^2 - 3k + 2 = 0$, $k_1 = 1,\ k_2 = 2$, то

$$y_{00} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Частное решение следует искать в виде

$$y_ч = P_2(x)e^{\alpha x}x^r = (Ax^2 + Bx + C)e^{2x}x,$$

т.к. r=1 (есть одно совпадение контрольного числа $z = \alpha = 2$ с корнем характеристического уравнения).

б) Так как $k^2+k-2=0$, $k_1=1$, $k_2=-2$, то

$$y_{00}=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}.$$

Контрольное число $z=\alpha+i\beta=i$. Частное решение следует искать в виде $y_ч=[P_2(x)\cos\beta x+Q_2(x)\sin\beta x]x^r=(Ax^2+Bx+C)\cos x+(Mx^2+Nx+P)\sin x$

(т.к. r=0, совпадений нет).

в) $k^2+k=0 \quad\to\quad k_{1,2}=\pm i \quad\to\quad y_{00}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Так как $f=3\sin x$, то $\alpha=0$, $\beta=1$. Контрольное число $z=\alpha+i\beta$ равно z=i ; есть совпадение с корнем $k_1=i$ характеристического уравнения, следовательно, частное решение следует искать в виде

$$y_r=(A\sin x+B\cos x)x.$$

Самостоятельная работа

Найти:

а) частное решение линейного неоднородного уравнения 2-го порядка;

б) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

3.1. а) $y''-2y'-8y=16y^2+2$ $\qquad y(0)=0;\ \ y'(0)=5$

б) $y''-2y'-8y=5e^{4x}$

3.2. а) $y''+y'=x^2e^x$ $\qquad y(0)=2;\ \ y'(0)=0$

б) $y''+y'=x+1$