Задание

1. Прочитать внимательно лекцию.
2. Законспектировать лекцию в рабочую тетрадь, обязательно записать примеры решения и формулы.
3. Фотоотчёт конспекта прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Лекция.

Тема: Применение интеграла к прикладным задачам

План.

1. Применение интеграла в физике.
2. Применение интеграла в математике.

Определённый интеграл имеет многочисленные приложения в математике, механике, физике, астрономии, технике и других областях человеческой деятельности. Мы рассмотрим здесь только применение в физике и математике.

Применение интеграла

Математика 1. Вычисления S фигур. 2. Длина дуги кривой. 3. V тела на S параллельных сечений. 4. V тела вращения и т.д.	***Физика*** 1. Работа *A* переменной силы. 2. S – (путь) перемещения. 3. Вычисление массы. 4. Вычисление момента инерции линии, круга, цилиндра. 5. Вычисление координаты центра тяжести. 6. Количество теплоты и т.д.

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПУТИ, ПРОЙДЕННОГО ТОЧКОЙ.

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Примеры:

1. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t, \quad t_1 = 3, t_2 = 4$. *Следовательно,*
$s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (*м*).

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью v = *(4t+5)* м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = [2t^3 + t^2]_0^5 = 275\ (м), s_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75\ (м),$$
$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200\ (м).$$

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью и = (39,2—9,8^) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2—9,8t = 0, откуда I = 4 с. По формуле на ходим

$$s = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)dt = [39{,},2t - 4{,}9t^2]_0^4 = 78{,}4\ (м).$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ СИЛЫ.

Работа, произведенная переменной силой f(x) при перемещении по оси *Ox* материальной точки от х = *а* до *x=b,* находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Г у к а: *F=kx, (3)* где F — сила Н; *х*—абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой *F*, а *k* — коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример:

1. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

Решение: используя равенство (3), имеем 50=0,01k, т. е. kК = 5000 Н/м. Находим пределы интегрирования: а = 0,22 — 0,2 = 0,02 (м), b=0,32— 0,2 = 0,12(м). Теперь по формуле (2) получим

$$A = \int_{0{,}02}^{0{,}12} 5000dx = 5000\frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}02}^{0{,}12} = 2500(0{,}0144 - 0{,}0004) = 2500 * 0{,}014 = 35\ (Дж).$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ, ПРОИЗВОДИМОЙ ПРИ ПОДНЯТИИ ГРУЗА.

Задача. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

Решение: выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx Работа A, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом P на высоту x, равна Px.

Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину dV = πr^2 *dx и изменение веса P на величину * dP = 9807* r^2 *dx; при этом совершаемая* *работа А изменится на величину dA=9807nr² xdx. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H, получим*

$$A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi * 0{,}25 * 2^2 = 4903\pi \text{ (Дж)}$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ.

Значение силы *P* давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения *x* этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле $P = 9807\, \delta\, S\, x$,

где δ — плотность жидкости, кг/м^3; S — площадь площадки, м^2; *x* - глубина погружения площадки, м.

5. ДЛИНА ДУГИ.

Пусть плоская кривая *AB* задана уравнением *y =f(x) (a* $\le$ *x* $\le$ *b)*, причем *f(x)* и *f ?(x)* — непрерывные функции в промежутке [a,b]. Тогда дифференциал *dl* длины дуги *AB* выражается формулой $dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ или $dl = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$, а длина дуги *AB* вычисляется по формуле $L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$

где a и b—значения независимой переменной *x* в точках A и B.

Если кривая задана уравнением *x =* φ *(y)(c y* $\le$ *d)*, то длина дуги AB вычисляется по формуле $L = \int_c^d \sqrt{1 + [\varphi'(y)]^2} dy,$ где *c* и *д* значения независимой переменной *y* в точках *A* и В.

6. ЦЕНТР МАСС.

. Пример. Пусть вдоль стержня-отрезка [a;b] оси Ox - распределена масса плотностью ρ (x), где ρ (x) - непрерывная функция. Покажем, что а) суммарная масса М стержня равна $\int_a^b \rho(x) dx$; б) координата центра масс x' равна $\frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x) dx$.

.

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа; *F* – сила; *N* - мощность.	*F(x)=A' (x);* *N(t)=A' (t).*	A=$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$; A=$\int_{t_1}^{t_2} N(t) dt.$
m –масса тонкого стержня p – линейная плотность	P(x)=m' (x).	m=$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx.$
Q –электрический заряд; I – сила тока.	I(t)=q' (t)	Q=$\int_{l_1}^{l_2} I(t) dt$

S –перемещение; v –скорость.	V(t)=S' (t)	$S=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Q –количество теплоты; c – теплоёмкость.	C(t)=Q' (t)	$Q=\int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

Приложения определённого интеграла в геометрии.

Объём тела вращения. Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью OX

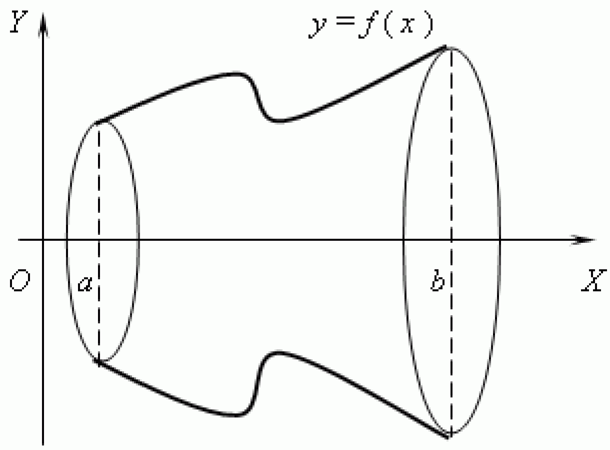


Рис. 10

Объём V тела вращения вокруг оси OX будет равен:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx .$$

Объём V тела вращения вокруг оси OY будет равен:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dx$$

П р и м е р 1. Найти объём усечённого конуса, образованного вращением прямой $y = x + 1$ вокруг оси OX и ограниченной $x = 0$ и $x = 3$.

Р е ш е н и е . В соответствии с вышеприведенной формулой имеем:

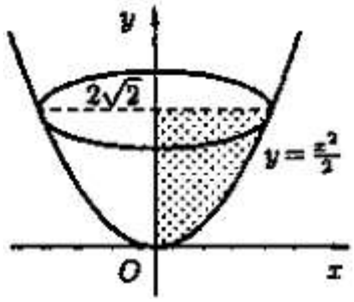
$$V = \pi \int_0^3 (x+1)^2 dx = \pi \int_0^3 (x^2 + 2x + 1)\,dx = (x^3/3 + x^2 + x)\Big|_0^3 = 21.$$

П р и м е р 2.

Вычислите объём тела, полученного вращением кривой – графика функции y= sinx, x=0, x=п, вокруг оси Ох.

$$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2dx=\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)dx=\pi\left(\int_0^{\pi}dx-\int_0^{\pi}\frac{\cos 2x+1}{2}dx\right)=\pi\left(x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

П р и м е р 3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями



$y=\frac{x^2}{2}$, x=0, y=$2\sqrt{2}$ вокруг оси Оу

Решение:

$x=\sqrt{2y}$

$$V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2y}\right)^2dy=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}2ydy=\pi y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}}=8\pi$$

Контрольные вопросы:

1. Где применяется определенный интеграл?
2. Какие задачи можно решить с помощью определенного интеграла в физике?
3. Как найти путь, пройденный телом за определенное время?
4. Как вычислить работу тела?
5. Как найти обьем тела вращения вокруг оси ОХ или вокруг оси ОУ?