Уважаемые студенты!

Вам необходимо ознакомиться с теоретический материалом темы, законспектировать по составленному плану, рассмотреть решение примеров, ответить на контрольные вопросы, выполнить самостоятельную работу.

Электронная почта: *hvastov@rambler.ru*

Лекция

Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.

План.

1. Определение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.
2. Характеристическое уравнение и анализ его корней.

Дифференциальное уравнение второго порядка называют **линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами**, если оно имеет вид $y'' + py' + qy = 0$, где p и q любые числа.

Для нахождения общего решения такого уравнения целесообразно действовать таким образом:

1) составить **характеристическое уравнение** путем замены y'' на k^2, y' на k, y на 1, т.е. получить алгебраическое уравнение $k^2 + kp + q = 0$

2) решить алгебраическое уравнение, используя формулу: $k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

.

3) проанализировать возможные корни характеристического уравнения:

№ п/п	Корни характеристического уравнения	Частные решения диф. уравнения	Общее решение дифференциального уравнения
1	$k_1 \neq k_2$ действит.разные	$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	$k_1 = k_2$ действит.равные	$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_2 x}$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$

3.	$\alpha \pm \beta \cdot i$ комплексно-сопряж.	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$

Пример 1. Найти общие решения уравнений:

а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 0$; в) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

Для уравнения а) характеристическим уравнением является $k^2 - 3k + 2 = 0$.

Корни характеристического уравнения $k_1 = 2;\ k_2 = 1$ действительны и различны, поэтому общее решение уравнения а) будет: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{x}$.

Для уравнения б) характеристическим уравнением является $k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k^2+2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = -2$. Корни характеристического уравнения действительны и равны, поэтому общее решение уравнения б): $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$.

Для уравнения в) характеристическим уравнением является

$$k^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Корни этого уравнения комплексные числа, причем $\alpha = -2$, $\beta = 1$, поэтому общим решением дифференциального уравнения в) является: $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения: $y'' - 5y' + 6y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 5k + 6 = 0,$$
$$D = 25 - 24 = 1,$$
$$k_1 = 2; k_2 = 3.$$

Частное решение имеет вид:

$y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{3x}$

Общее решение будет иметь вид: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2 + 4k + 4 = 0$, $k_1 = k_2 = -2$. Частное решение имеет вид: $y_1 = e^{-2x}, y_2 = xe^{-2x}$. Общее решение $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x\right)$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения: $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 6k + 13 = 0,$$
$$D = 36 - 4\cdot 13 = -16,$$
$$k_1 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i; k_2 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i.$$

$y_1 = e^{-3x}\cos 2x,$ $y_2 = e^{-3x}\sin 2x$ - частные решения,

а $y = e^{-3x}\left(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right)$ - общее решение дифференциального уравнения.

Образцы решения примеров

Найти частные решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 1. $y'' + 7y' + 12y = 0$; y(0); $y'(0) = -2$

Решение: Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 7k + 12 = 0$; откуда $k_1 = -3$; $k_2 = -4$. $D = 7^2 - 4 * 1 * 12 = 1$; $k_1 = \frac{-7+1}{2} = -3$; $k_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$

Общее решение: $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$ Дифференцируя получим $y' = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}$. Согласно заданным начальным условием имеем

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-3*0} + C_2 e^{-4*0} \\ -2 = -3C_1 e^0 + 4(-C_2)e^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 + 4C_2 = 2, \end{cases} \quad C_1 = 2;\ C_2 = -1.$$

Искомым частным решением является функция $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$

Пример 2. $y'' + 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 2; y'(0) = 3$.

Решение: составляем характеристические уравнения $k^2 + 6k + 9 = 0; D = 36 - 36 = 0$; $k_1 = k_2 = k = -3$.

Искомое общее решение имеет вид $y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$

Дифференцируем общее решение:

$y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + e^{-3x} * C_2$. Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий:

$$\begin{cases} 2 = e^{-3*0}(C_1 + C_2 * 0) \\ 3 = -3e^0(C_1 + C_2 * 0) + e^0 * C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ 3 = -3(2) + C_2 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 9 \end{cases}$$

Искомое частные решение: $y = e^{-3x}(2 + 9x)$.

Пример 3. $y'' + 2y' + 5y = 0$ $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Решение: характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 2k + 5 = 0; \text{корни его } k_1 = -1 + 2i;\ k_2 = -1 - 2i$$

$$D = 4 - 20 = -16;\ \sqrt{16} = 4i;\ k_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + 2i;\ k_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - 2i$$

Общее решение имеет вид: $y = e^{-x}(C_1 cis2x + C_2 sin2x)$

Дифференцируя, найдем

$$y' = -e^{-x}(C_1 cos2x + C_2 sin2x) + e^{-x}(-2C_1 sin2x + 2C_2 cos2x) =$$
$$= e^{-x}\big((2C_2 - C_1)cos2x - (2C_1 + C_2) * sin2x\big).$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий

$$\begin{cases} 0 = e^{-0}(C_1 cos0 + C_2 sin0) \\ 1 = e^{-0}((2C_2 - C_1)cos0 - (2C_1 + C_2)sin0 \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = 0$; $C_2 = \frac{1}{2}$.

Искомое частное решение: $y = \frac{1}{2}e^{-x} * sin2x$.

Задания для самостоятельной работы

Найти частные решения линейных однородных дифференциальных уравнений II порядка с постоянными коэффициентами:

1.А)$y'' + y' - 2y = 0$ $y(0) = -3;\ y'(0) = 2$

Б)$y'' - 4y' + 4y = 0$ $y(0) = -4;\ y'(0) = 1$

В)$y'' - 6y' + 9y = 0$ $y(0) = 2;\ y'(0) = -3$

Упражнения для самостоятельной работы.

Найти общее решение уравнений:

1) $y'' - y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 3) $y'' - y' - 2y = 0$; 4) $y'' - 4y = 0$;

5) $y'' - y' - 3y = 0$; 6) $y'' + y' - y = 0$.

Контрольные вопросы.

1.Дать определение дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами.

2.Какое уравнение называется характеристическим?

3.Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами, если корни уравнения: а) действительные и разные; б) действительные и равные; в) комплексно-сопряженные?