Задание:

- Повторить теорию;
- Решить примеры для самостоятельного решения;
- Ответить на вопросы;
- По вопросам обращаться +7959-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Практическое занятие. Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Цель работы: отработать навыки решения дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Время выполнения:2 час.

Теоретические основы

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (1)$$

a_0, a_1, a_2 – действительные числа; f – непрерывная функция переменного x.

<u>Определение.</u> Если $f(x) \equiv 0,$ то уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (2)$$

называется *однородным* дифференциальным уравнением, соответствующим уравнению (1).

Если $f(x) \neq 0,$ то уравнение (1) называется *неоднородным*.

<u>структура общего решения уравнения .</u>

Если известно какое-нибудь частное решение ($y_{ч.н.}$) неоднородного уравнения (1),то его общее решение ($y_{о.н}$) есть сумма общего решения ($y_{о.о.}$) соответствующего однородного уравнения (2) и частного решения ($y_{ч.н.}$): $y_{о.н.} = y_{о.о} + y_{ч.н.}$

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (3)$$

Квадратное уравнение (3) называется ***характеристическим уравнением*** однородного уравнения (2).

Постановка задачи. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

План решения.

1. Составим характеристическое уравнение

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Найдем его корни k_1, k_2.

2. В зависимости от значений k_1 и k_2, запишем общее решение уравнения (2). При этом выделяют три случая:

- Если корни k_1 и k_2 уравнения (3) действительные и $k_1 \neq k_2$, общее решение запишется так

$y_{o.o.} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$.

- Если корни k_1 и k_2 уравнения (3) действительные и $k_1 = k_2$, общее решение запишется так

$y_{o.o.} = e^{k_1 x}(c_1 + c_2 x)$.

- Если уравнение (3) имеет комплексно – сопряженные корни:

$$k_1 = \alpha + \beta i,$$
$$k_2 = \alpha - \beta i,$$

тогда общее решение запишется так

$$y_{o.o.} = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x).$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$k_1 = -3 + 2i,$$
$$k_2 = -3 - 2i.$$

2. Так как k_1 и k_2 - комплексно – сопряженные корни, тогда общее решение запишется так

$$y_{о.о.} = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Практическое задание

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $a) y''+4y=0; b) y''-10y'+25y=0; c) y''+3y'+2y=0.$
2. $a) y''-y'-2y=0; b) y''+9y=0; c) y''+4y'+4y=0;$
3. $a) y''-4y=0; b) y''-4y'+13y=0; c) y''-3y'+2y=0;$
4. $a) y''-5y'+6y=0; b) y''-+3y'=0; c) y''+2y'+5y=0;$
5. $a) y''-2y'+10y=0; b) y''+y'-2y=0; c) y''-2y'=0;$
6. $a) y''-4y=0; b) y''+2y'+17y=0; c) y''-y'-12y=0;$
7. $a) y''+y'-6y=0; b) y''+9y'=0; c) y''-4y'+20y=0;$
8. $a) y''-49y=0; b) y''-4y'+5y=0; c) y''+2y'-3y=0;$
9. $a) y''+7y'=0; b) y''-5y'+4y=0; c) y''+16y=0;$
10. $a) y''-6y'+8y=0; b) y''+4y'+5y=0; c) y''+5y'=0;$
11. $a) 4y''-8y'+3y=0; b) y''-3y'=0; c) y''-2y'+10y=0;$
12. $a) y''+4y'+20y=0; b) y''-3y'-10y=0; c) y''-16y=0;$
13. $a) 9y''+6y'+y=0; b) y''-4y'-21y=0; c) y''+y=0;$
14. $a) 2y''+3y'+y=0; b) y''+4y'+8y=0; c) y''-6y'+9y=0;$
15. $a) y''-10y'+21y=0; b) y''-2y'+2y=0; c) y''+4y=0;$
16. $a) y''+6y'=0; b) y''+10y'+29y=0; c) y''-8y'+7y=0;$
17. $a) y''+25y=0; b) y''+6y'+9y=0; c) y''+2y'+2y=0;$
18. $a) y''-3y'=0; b) y''-7y'-8y=0; c) y''+4y'+13y=0;$
19. $a) y''-3y'-4y=0; b) y''+6y'+13y=0; c) y''+2y'=0;$
20. $a) y''+25y'=0; b) y''-10y'+16y=0; c) y''-8y'z=16y=0;$

21. $a)y''-3y'-18y=0; b)y''-6y'=0; c)y''+2y'+5y=0;$

22. $a)y''-6y'+13y=0; b)y''-2y'-15y=0; c)y''-8y'=0;$

23. $a)y''+2y'+y=0; b)y''+6y'+25y=0; c)y''-4y'=0;$

24. $a)y''+10y'=0; b)y''-6y'+8y=0; c)4y''+4y'+y=0;$

25. $a)y''+5y=0; b)9y''-6y'+y=0; c)y''+6y'+8y=0;$

26. $a)y''+6y'+10y=0; b)y''-4y'+4y=0; c)y''-5y'+4y=0;$

27. $a)y''-y=0; b)4y''+8y'-5y=0; c)y''-6y'+10y=0;$

28. $a)y''+8y'+25y=0; b)y''+9y'=0; c)9y''+3y'-2y=0;$

29. $a)6y''+7y'-3y=0; b)y''+16y=0; c)4y''-4y'+y=0;$

30. $a)9y''-6y'+y=0; b)y''+12y'+37y=0; c)y''-2y'=0;$

Контрольные вопросы

1.Какое уравнение называют характеристическим?

2.Запишите вид общего решения однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами, соответствующего решению характеристического уравнения(3 случая)

3.Сформулируйте алгоритм решения неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

4.Запишите вид какого-либо частного решения для каждого случая правой части неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.