Тема лекции: «Транспортная задача»

План лекции

1. Построение математической модели транспортной задачи.
2. Методы решения транспортных задач.
3. Метод потенциалов решения транспортных задач.

1. Построение математической модели транспортной задачи

Мы рассмотрели общие подходы к решению задач линейного программирования. Однако существуют частные типы задач линейного программирования, которые в силу своей структуры допускают решения более простыми методами. Мы остановимся только на одной из них – так называемой транспортной задаче.

Постановка транспортной задачи

Однородный груз, имеющийся в *m* пунктах отправления (производства) A1, A2, ..., Am соответственно в количествах a1, a2, ..., am единиц, требуется доставить в каждый из n пунктов назначения (потребления) B1, B2, ..., Bn соответственно в количествах b1, b2, ..., bn единиц. Стоимость перевозки (тариф) единицы продукции из Ai в Bj известна для всех маршрутов Ai, Bj и c_{ij} (i = 1, m; j = 1, n). Требуется составить такой план перевозок, при котором весь груз из пунктов отправления вывозится, и запросы всех пунктов потребления удовлетворяются (закрытая модель), т. е: $\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$ а суммарные транспортные расходы минимальны.

Математическая модель транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{1n} = a1 \\ X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} = a2 \\ \ldots \\ X_{m1} + X_{m2} + \ldots + X_{mn} = am \\ X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = b1 \\ X_{12} + X_{22} + \ldots + X_{m2} = b2 \\ \ldots \\ X_{1n} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = bn \\ X_{ij} \geq 0, i = 1, m; j = 1, n \end{cases}$$

План, будем называть ***опорным***, если в нем отличны от нуля не более **m+n-1** базисных перевозок, а остальные перевозки равны 0.

План будет называться ***оптимальным***, если он, среди всех допустимых планов, приводит к минимальной суммарной стоимости перевозок.

2.Методы решения транспортных задач

Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то её можно решать симплекс-методом, но в силу своей особенности её можно решить гораздо проще.

Условия задачи удобно располагать в таблице, вписывая в ячейки количество перевозимого груза из Ai в Bj груза $X_{ij} \geq 0$, а в маленькие клетки – соответствующие тарифы C_{ij}.

Потребители / Поставщики	B1	B2	...	Bn	Запасы
A1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	...	X_{1n} C_{1n}	a1
A2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	...	X_{2n} C_{2n}	a2
...	...	...	...	...	...
Am	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	...	X_{mn} C_{mn}	am
Потребности	b1	b2	...	bn	

Затем решение задачи разбивается на два этапа:

1. *Определение опорного плана.*
2. *Нахождение оптимального решения путем последовательных операций.*

1.Найдем вначале допустимое (опорное) решение транспортной задачи. Это решение можно найти, используя метод "северо-западного угла" или метод "минимального элемента".

Метод северо-западного угла (диагональный)

Сущность метода *заключается в том, что на каждом шаге заполняется левая верхняя (северо-западная) клетка оставшейся части таблицы, причем максимально возможным числом*: либо полностью выносится груз из Ai, либо полностью удовлетворяется потребность Bj. Процедура продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге не исчерпаются запасы ai и не удовлетворятся все потребности bj. В заключении проверяют, удовлетворяют ли найденные компоненты плана X_{ij} горизонтальным и вертикальным уравнениям.

Пример 1: Построим опорный план методом северо-западного угла.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20	12	5	8	15	

Метод наименьшего элемента

Сущность метода *в том, что на каждом шаге заполняется та клетка оставшейся части таблицы, которая имеет наименьший тариф; в случае наличия нескольких таких равных тарифов заполняется любая из них.* В остальном действуют аналогично предыдущему способу.

Пример 2: Построим опорный план методом наименьшего элемента.

	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	1	0	3	4	2	15
A2	5	1	2	3	3	25
A3	4	8	1	4	3	20
	20	12	5	8	15	

3.Метод потенциалов решения транспортных задач

Для проверки построенного опорного плана на оптимальность применяется метод потенциалов.

Метод потенциалов:

Введем строку потенциалов u_i и столбец потенциалов v_j. Полагая, что $u_1=0$, а остальные u_i и v_j найдем так, чтобы

а) *для заполненных ячеек* выполнялись равенства $u_i + v_j = c_{ij}$;

б) *для незаполненных ячеек* выполнялись равенства $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

Критерий оптимальности

Если известны потенциалы решения X_0 транспортной задачи и для всех незаполненных ячеек выполняются условия $\Delta_{ij} \geq 0$ то X_0 является оптимальным планом транспортной задачи.

Для построения второго опорного плана необходимо применить ***цикл перерасчёта таблицы*** – это последовательность ячеек, удовлетворяющая условиям:

1. Одна ячейка пустая, все остальные занятые.
2. Любые две соседние ячейки находятся в одной строке или в одном столбце.

Пустой ячейке присваивают знак "+", остальным – поочерёдно знаки "–" и "+".

В минусовых клетках находят число $X = \min(X_{ij})$. Далее составляют новую таблицу по следующему правилу:

3. В плюсовых клетках добавляем X.
4. Из минусовых клеток вычитаем X.
5. Все остальные клетки вне цикла остаются без изменения.

Пример 3: См. пример 2. Проверить построенный план на оптимальность методом потенциалов.

Решение: Возьмем таблицу с построенным планом и добавим еще столбец и строку потенциалов.

По заполненным клеткам вычислим потенциалы по правилу $u_i + v_j = c_{ij}$:

Для пустых клеток вычислим их оценки $\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Будем их записывать в верхний правый угол клетки.

	B1	B2	B3	B4	B5		v_j
A1	1	0	3	4	2	15	
A2	5	1	2	3	3	25	
A3	4	8	1	4	3	20	
	20	12	5	8	15		
u_i							

Пример 4: Для плана примера 3 построим цикл перерасчета (в предыдущей таблице) и построим второй опорный план: Заполняем клетку_____

	B1	B2	B3	B4	B5		v_j
A1	1	0	3	4	2	15	
A2	5	1	2	3	3	25	
A3	4	8	1	4	3	20	
	20	12	5	8	15		
u_i							

Вычислим суммарную стоимость перевозок для построенного плана:
F =
Проверим план на оптимальность методом потенциалов.
План - _____
Построим цикл перерасчета таблицы. Заполняем клетку_____
Третий опорный план:

	B1	B2	B3	B4	B5		v_j
A1	1	0	3	4	2	15	
A2	5	1	2	3	3	25	
A3	4	8	1	4	3	20	
	20	12	5	8	15		
u_i							

Вычислим суммарную стоимость перевозок для построенного плана:
F =
Проверим план на оптимальность методом потенциалов.
План - _____
Ответ: _____
_____
_____
_____

Контрольные вопросы:

1. Приведите пример транспортной задачи.
2. В чем суть метода потенциалов?
3. Что находится изначально: опорный план перевозок или оптимальный план перевозок?

Задачи на закрепление:

На трех базах A_1, A_2, A_3 имеется однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 условных единиц соответственно. Этот груз требуется перевести в четыре пункта потребления B_1, B_2 , B_3 и B_4 в количестве b_1, b_2 , b_3 и b_4 условных единиц соответственно. Стоимости перевозок единицы груза от поставщиков потребителям указаны в таблице в матрице стоимостей С. Составить такой план перевозки грузов, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

1) a_1=140, a_2=120, a_3=170
b_1=98, b_2 =122, b_3=100, b_4=110

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2)a_1=160, a_2=140, a_3=100
b_1=90, b_2 =54, b_3=176, b_4=80

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$