Задание

1. Изучить материал лекции, законспектировать решение всех задач. Решить самостоятельно три задачи на выбор из предложенного списка задач для самостоятельного решения.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311.

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Лекция на тему: «Правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу.**»**

Цель: изучить решение типовых задач с помощью вероятностного графа.

План

1. Понятие размеченного графа.
2. Правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу.
3. Примеры решения типовых задач.
4. Задачи для самостоятельного решения

1. Понятие размеченного графа

Размеченный граф вероятностей рисуют (как правило) слева направо. Опыты [испытания] обозначаются в виде жирных точек (рис. 1 и 2) или в виде прямоугольников (рис. 3 – 12), а каждый исход – сплошной ли- нией (ветвью), идущей от соответствующей точки или прямоугольника. Около каждой ветви указывается вероятность соответствующего исхода. Сумма вероятностей на ветвях, выходящих из одного прямоугольника, равна единице. Двигаясь по ветвям и перемножая соответствующие вероятности, в

конце пути мы получаем вероятность сложного события. Сложив нужные вероятности, найдем вероятность искомого события.

Имеется две основные разновидности графов: неориентированные и ориентированные. *Неориентированный граф* – совокупность точек (вер- шин графа) с соединяющими некоторые из них отрезками (ребрами графа; ветвями). Ориентированный граф – это совокупность точек (вершин) с соединяющими некоторые из них ориентированными отрезками (стрелками). В этой работе мы будем пользоваться только ориентированными графами.

2. Правило вычисления вероятности по размеченному вероятностному графу

1) вероятность попадания в конечную вершину (вероятность исхода) можно вычислить, перемножая вероятности, встречаемые на ребрах соответствующего маршрута (рис. 1, жирный маршрут);

2) если же нас интересует вероятность события, которому благоприятствуют несколько исходов, то вероятности соответствующих конечных вершин складываются (рис. 2, жирные маршруты).

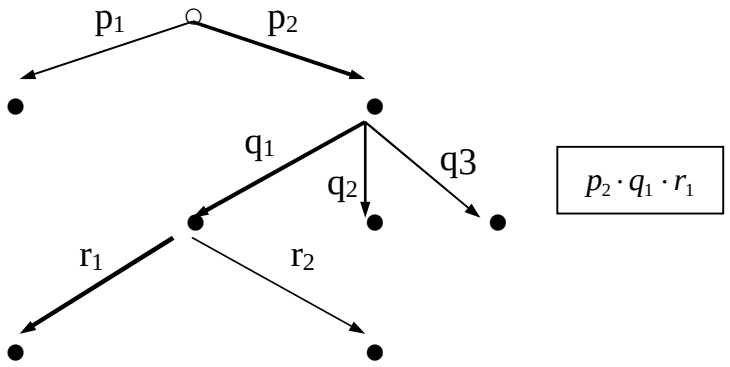

Рис. 1

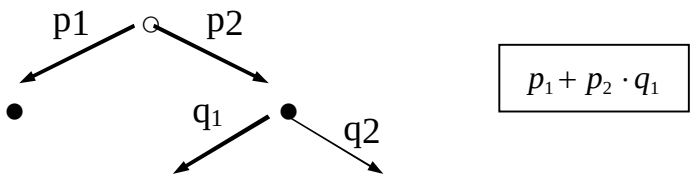

Рис. 2

3. Примеры решения типовых задач

Решить задачи 1 - 10, предварительно построив размеченный граф вероятностей.

Задача 1. В первой урне находятся 7 белых и 9 черных шаров, во второй - 6 белых и 4 черных шаров. Из первой урны во вторую переложи- ли два шара, а затем из второй урны извлекли один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 3).

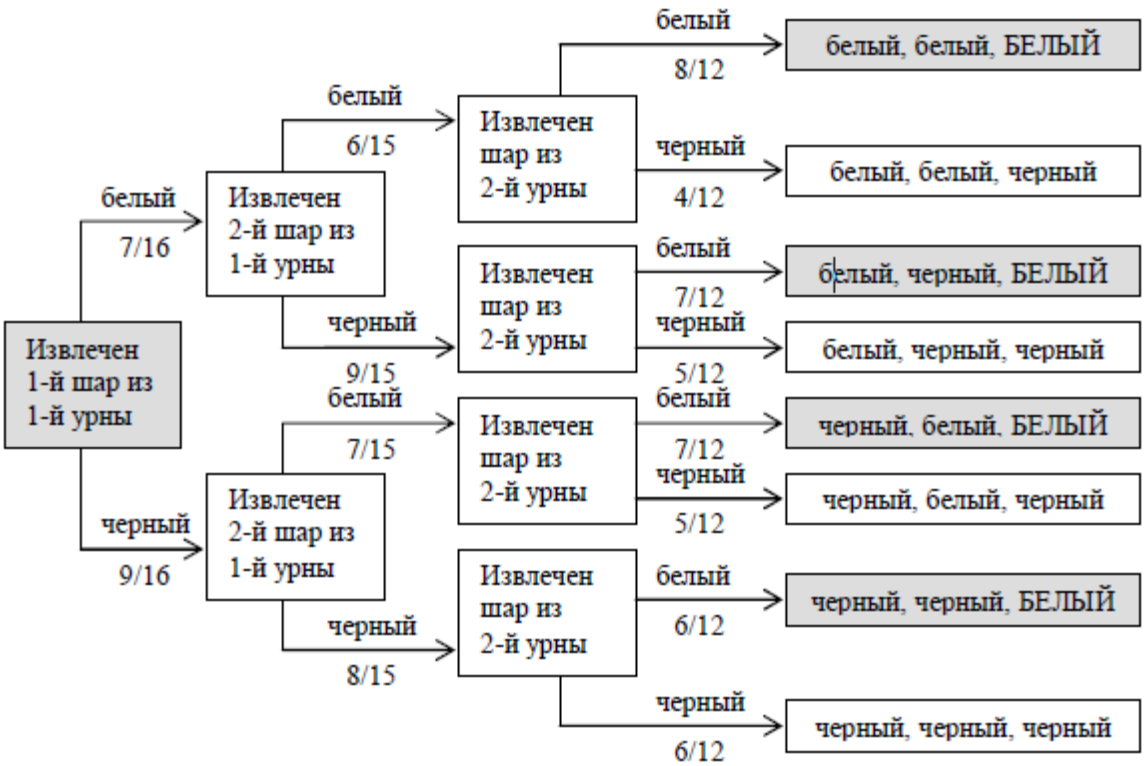

Рисунок 3

Пусть событие A - извлеченный из второй урны шар оказался белым. Этому событию на графе благоприятствуют четыре маршрута. Поэтому

$$P(A)=\frac{7}{16}\cdot\frac{6}{15}\cdot\frac{8}{12}+\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{15}\cdot\frac{7}{12}+\frac{9}{16}\cdot\frac{7}{15}\cdot\frac{7}{12}+\frac{9}{16}\cdot\frac{8}{15}\cdot\frac{6}{12}=\frac{55}{96}$$

(Здесь мы применили формулу полной вероятности). Перечислите гипотезы.

Задача 2. В каждой из трех групп по 25 студентов. Число студентов группы, сдавших экзамен по математике, равно 22, 20 и 18 соответственно. Случайно выбранный студент сдал экзамен по математике. Какова вероятность, что это студент первой группы?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 4).

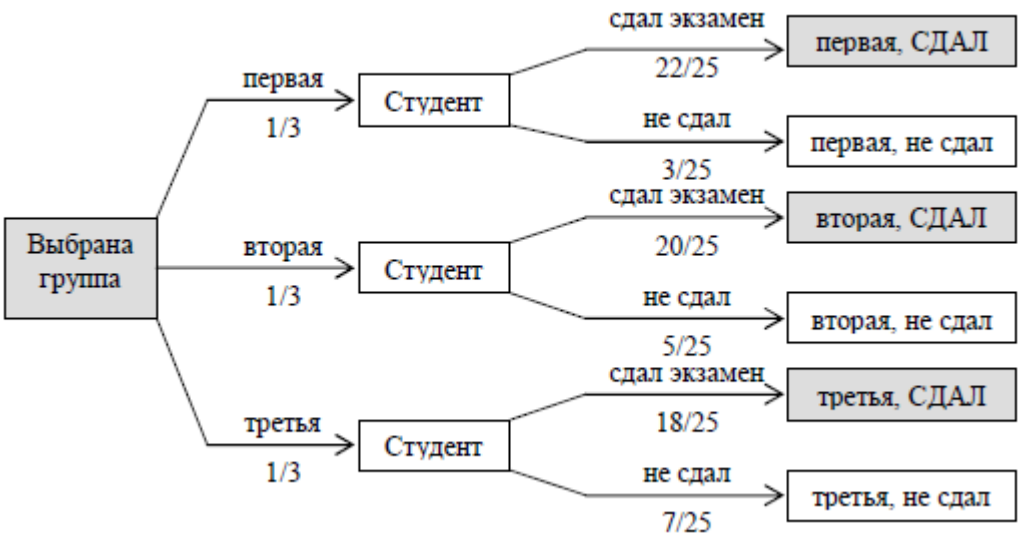

Рисунок 4

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что случайно выбранный студент сдал экзамен. Этому событию на графе благоприятствуют три маршрута. Поэтому

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{22}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{20}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{18}{25}=\frac{1}{3\cdot 25}(22+20+18)=\frac{60}{3\cdot 25}=\frac{5\cdot 12}{3\cdot 25}=\frac{4}{5}.$$

(Здесь мы применили формулу полной вероятности). Перечислите гипотезы.

Задача 3. В испытании возможны четыре исхода: e_1, e_2, e_3, e_4. Их вероятности соответственно равны $p_1=0{,}2$; $p_2=0{,}1$; $p_3=0{,}4$; $p_4=0{,}3$. Событию A благоприятствуют исходы e_1 и e_4, а событию B – исходы e_2, e_3 и e_4. Найти вероятности: $P(A)$, $P(B)$, $P(AB)$, $P(A/B)$, $P(B/A)$. Выяснить: 1) зависит ли событие A от B и B от A; 2) совместны или нет события A и B.

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 5)

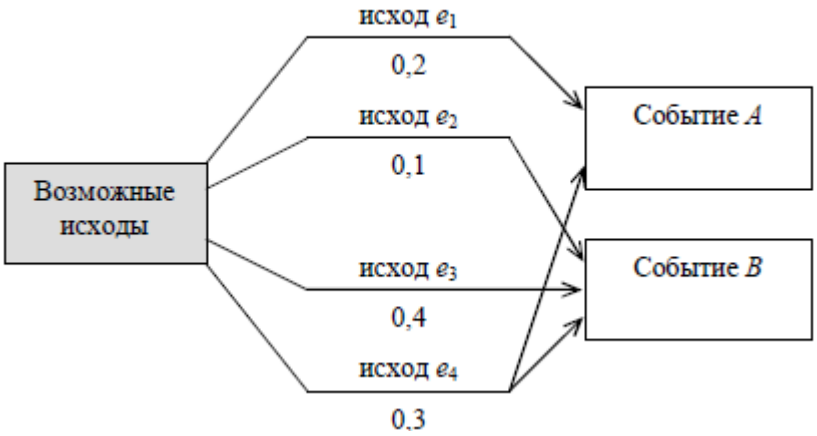

Рисунок 5

Имеем,

$$P(A)=\frac{2}{10}+\frac{3}{10}=\frac{5}{10};\quad P(B)=\frac{1}{10}+\frac{4}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10};$$

$$P(AB)=\frac{3}{10};\quad P(A/B)=\frac{3/10}{8/10}=\frac{3}{8};\quad P(B/A)=\frac{3/10}{5/10}=\frac{3}{5}.$$

Следовательно, события A и B зависимы. Они же совместны, поскольку исход $e4$ благоприятствует и событию A, и событию B.

Задача 4. Два стрелка независимо друг от друга делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7,а для второго – 0,8. Чему равна вероятность поражения мишени? В мишени обнаружено одно попадание. Какова вероятность, что она поражена первым стрелком?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 6).

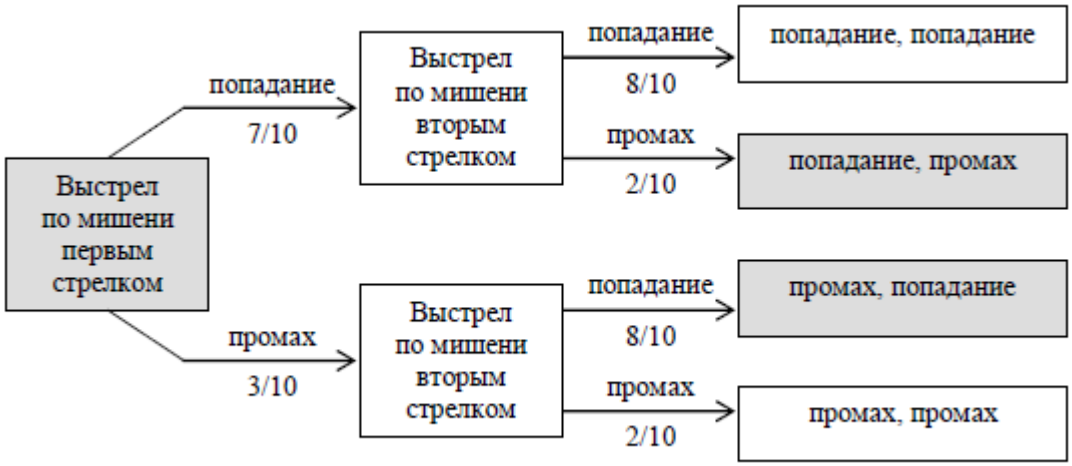

Рисунок 6

Обозначим события: A - попадание первым стрелком; B - попадание вторым стрелком; C – в мишени обнаружено одно попадание. Событию C на графе вероятностей благоприятствуют два маршрута. Поэтому

$$P(C)=\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{38}{100};\quad P(A/C)=\frac{7/10\cdot 2/10}{38/100}=\frac{14}{38}=\frac{7}{19}.$$

Задача 5. Из урны, где лежат 3 белых и 4 черных шаров, наугад *без возвращения* один за другим извлекают два шара. Какова вероятность того, что извлекут разноцветные шары?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 7).

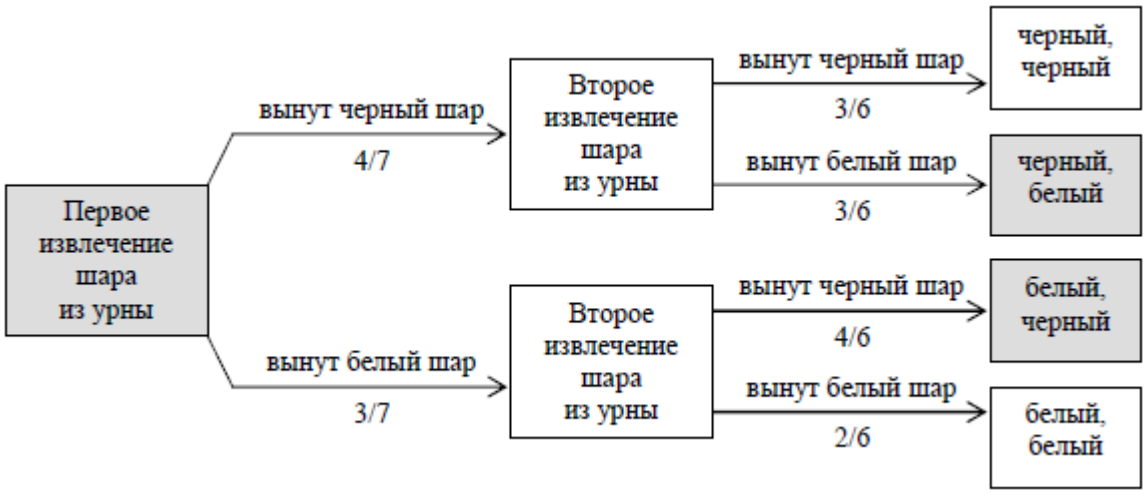

Рисунок 7

Обозначим через C - событие, состоящее в том, что извлекли разно цветные шары. На графе вероятностей этому событию благоприятствуют два маршрута. Поэтому

$$P(C)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$$

Задача 6. Студент пришел на экзамен, зная 25 из 30 билетов. Какова вероятность того, что он сдаст экзамен, если после отказа отвечать на билет ему предоставляется возможность вытянуть еще один?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 8).

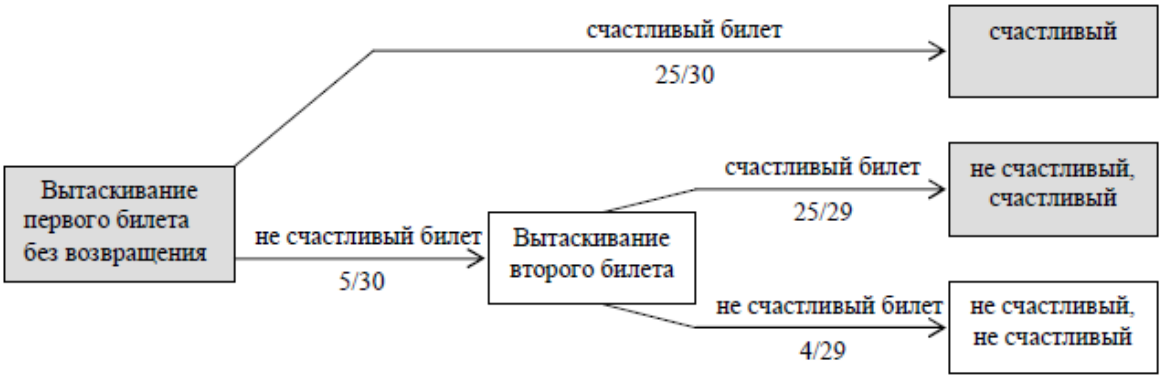

Рисунок 8

Обозначим через A событие, состоящее в том, что студент сдал экзамен. На графе вероятностей этому событию благоприятствуют два маршрута. Следовательно,

$$P(A)=\frac{25}{30}+\frac{5}{30}\cdot\frac{25}{29}=\frac{25}{30}\left(1+\frac{5}{29}\right)=\frac{25}{30}\cdot\frac{34}{29}=\frac{85}{87}.$$

Задача 7. На заводах A и B изготовлено 75 % и 25 % всех деталей. Из прошлых данных известно, что 10 % деталей завода A и 20 % деталей завода B оказываются бракованными. Случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на заводе A?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 9).

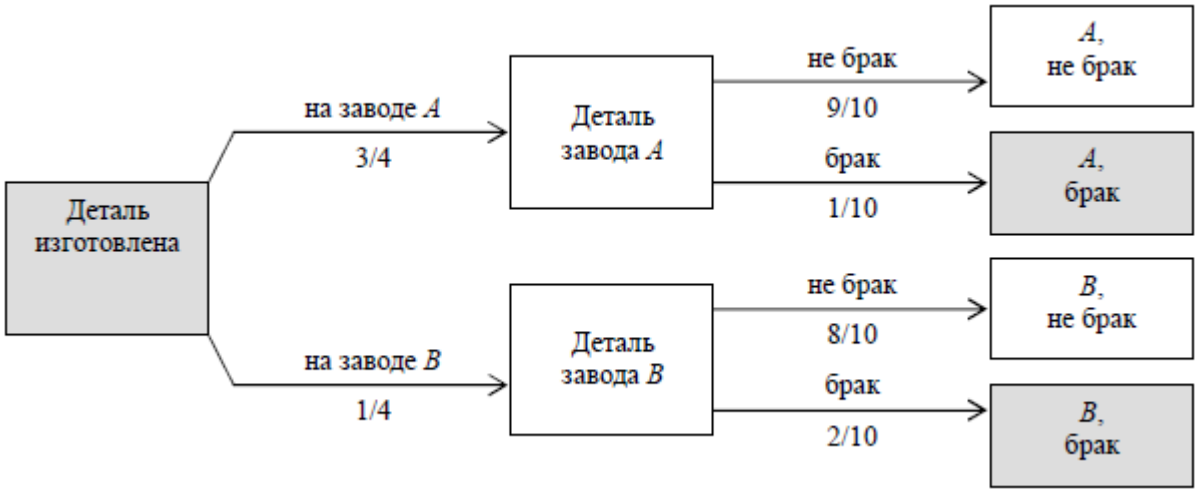

Рисунок 9

Пусть C - случайно выбранная деталь оказалась бракованной. На графе вероятностей этому событию благоприятствуют два маршрута. Значит,

$$P(C)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{10}=\frac{5}{40};$$

$$P(A/C)=\frac{3/4\cdot 1/10}{5/40}=\frac{3}{5};\quad P(B/C)=\frac{1/4\cdot 2/10}{5/40}=\frac{2}{5}.$$

Задача 8. Имеются три урны с шарами. В первой находится 5 голубыхи 3 красных шара, во второй – 4 голубых и 4 красных, в третьей – 8 голубых. Наугад выбирается одна из урн и из нее наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что он окажется красным?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 10).

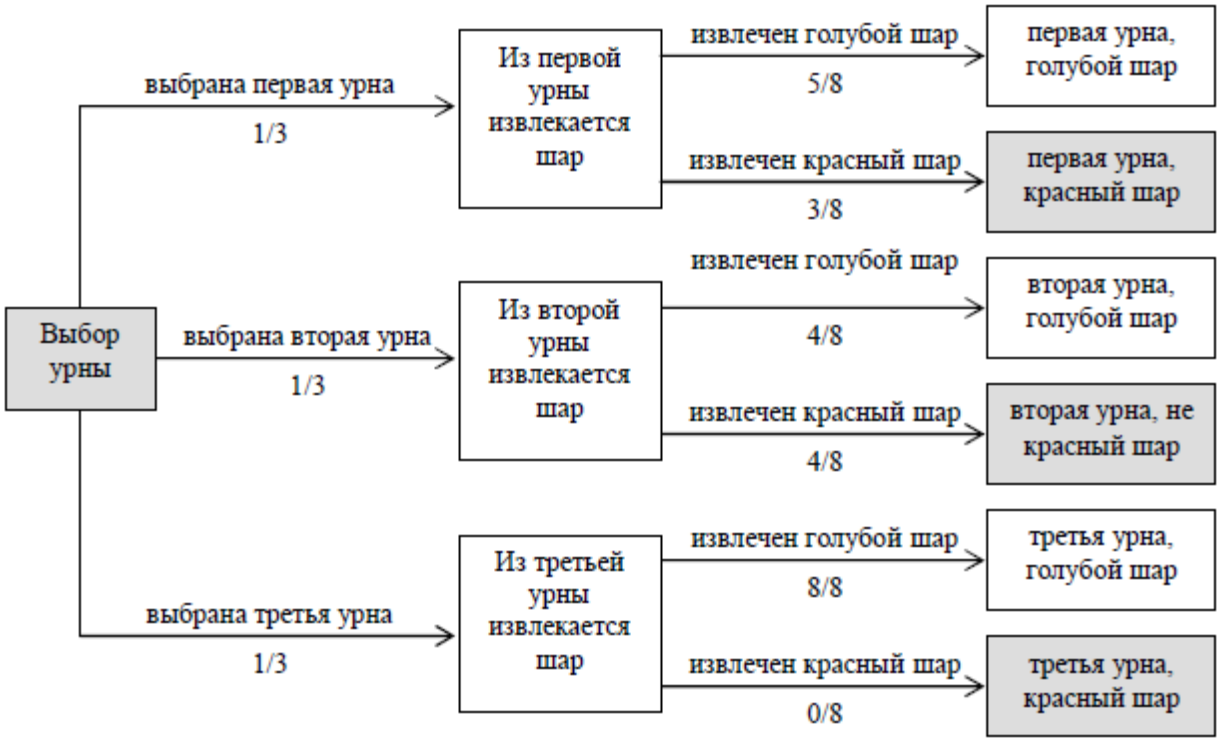

Рисунок 10

Пусть событие A - из наугад выбранной урны извлекается красный шар. На графе этому событию благоприятствуют три маршрута. Поэтому,

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{8} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{8} = \frac{7}{24}.$$

Задача 9. В пяти ящиках находятся одинаковые по размеру и весу шары. В двух ящиках – по 6 голубых и 4 красных шара (это ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) – по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) – 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что из-влеченный шар оказался красным?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис.11).

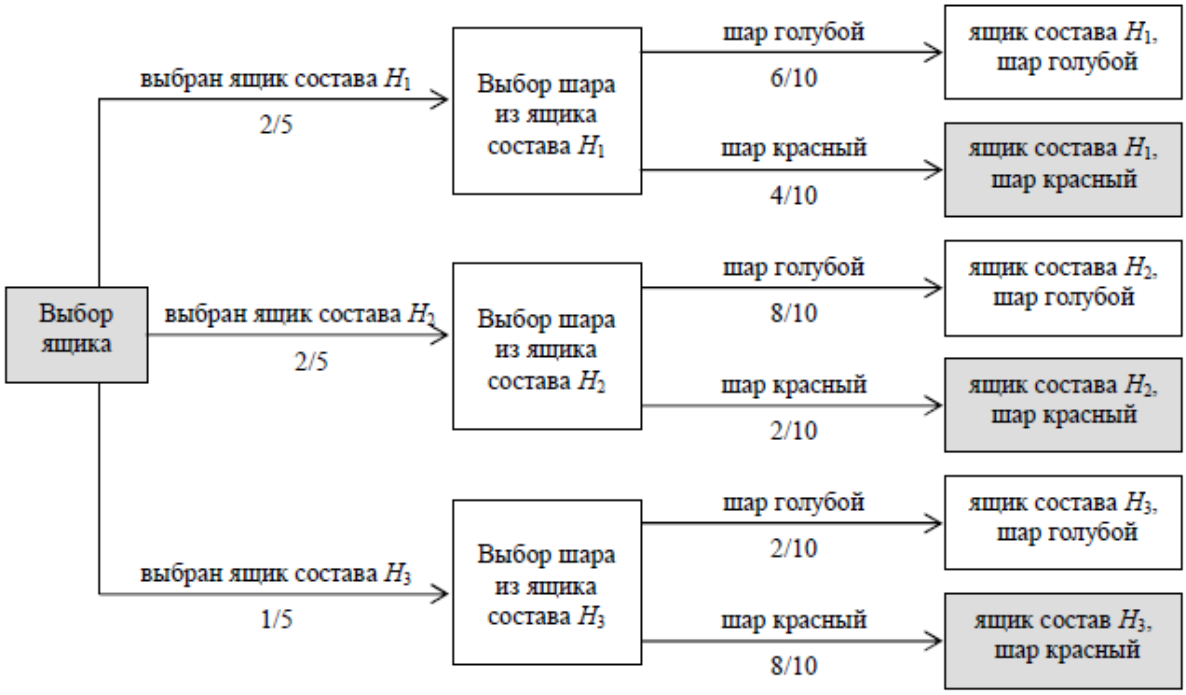

Рисунок 11

Обозначим через A событие, состоящее в том, что из наудачу выбранного ящика извлечен красный шар. На графе вероятностей этому собы тию. Благоприятствуют три маршрута. Поэтому,

$$P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{8}{10}=\frac{20}{5\cdot 10}=\frac{2}{5}.$$

Задача 10. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания первым стрелком равна p_1, а вторым p_2. Наудачу выбирается один стрелок. Какова вероятность того, что он попадет?

Решение

Построим размеченный вероятностный граф (рис. 12).

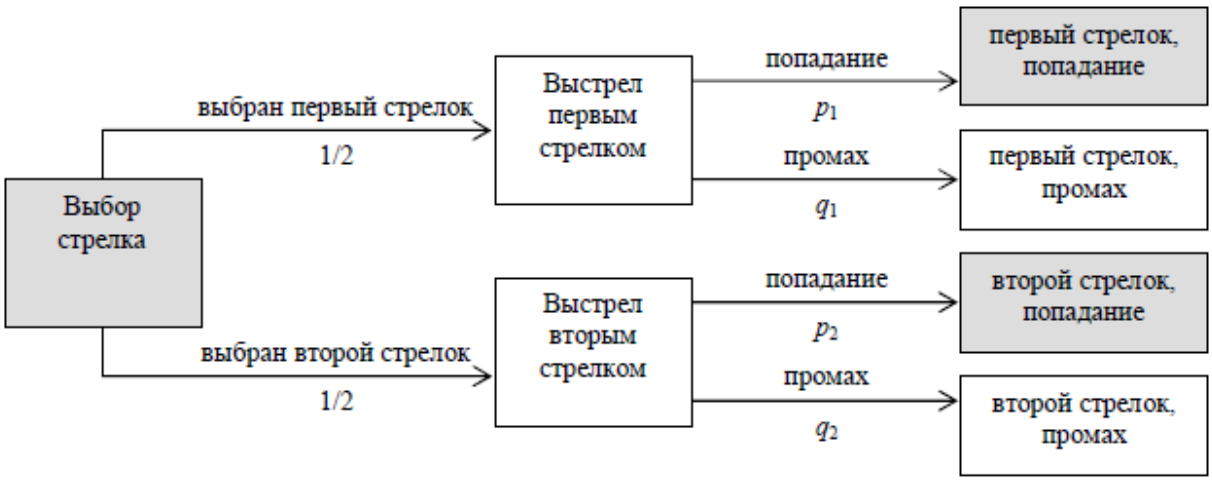

Рисунок 12

Обозначим через *C* - событие, состоящее в том, что наудачу выбран стрелок. Этому событию на графе вероятностей благоприятствуют два маршрута. Поэтому,

$$P(C) = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Например, если p_1=0,994, p_2=0,686, то P(C)=0,84.

Замечание. Графы, на рисунках 3, 4, 6-12, называют деревьями вероятностей.

4. Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Ответ: 20.

2. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках*л*, на остальных трех *и*. Выкладываются наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово *лилии*?

Ответ: 1/10.

3. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Ответ: 4/10.

4. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 10. Какова вероятность того, что это число является простым (т.е. имеет в точности два делителя)?

Ответ: 4/10.

5. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

Ответ: 1/10.

6. С первого автомата на сборку поступило 200 деталей, из которых 190 стандартных; со второго – 300, из которых 280 стандартных. Найти вероятность события A , состоящего в том, что наудачу взятая деталь будет стандартной, и условные вероятности его относительно событий B и B , если событие B состоит в том, что деталь изготовлена на первом станке.

Ответ:

$P(A)=0{,}94$; $P(A/B)=19/20$; $P(A/B)=0{,}93$.

7. Мастер обслуживает 5 станков. 10% рабочего времени он проводиту первого станка, 15% - у второго, 20% - у третьего, 25% - у четвертого, 30% - у пятого. Найти вероятность того, что в наудачу выбранный момент он находится: 1) у первого или третьего станка; 2) у второго или пятого; 3) у первого или четвертого станка; 4) у третьего или пятого; 5) у первого или второго, или четвертого станка.

Ответ: 1) 0,3; 2) 0,45; 3) 0,35; 4) 0,5; 5) 0,5.

8. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 30%, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3% . Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным.

Ответ: 0,022.

9. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30% - вторым, на 50% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1=0{,}01$, $q_2=0{,}005$, $q_3=0{,}006$. Найти вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется стандартной.

Ответ: 0,994.

10. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовлен- ных первым заводом, 95 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных вторым заводом, удовлетворяют стандарту 85. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампочка будет удовлетворять стандарту.

Ответ: 0,91.

11. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями: p_1= 0,2; p_2=0,3; p_3=0,5. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий соответственно равна: 0,9; 0,8; 0,7. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.

Ответ: 0,77.

12. Партия электрических лампочек на 25% изготовлена первым заводом, на 35% - вторым, на 40% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: q_1=0,03; q_2=0,02; q_3=0,01. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

Ответ: 0,019.

13. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные – вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго – 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Ответ: 0,5.

14. На фабрике машины a, b, c производят соответственно 20%,35%. 45% всех изделий. В их продукции брак составляет 3%, 2%, 4%. Какова вероятность того, что случайно выбранное дефектное изделие произведено машинами a, b, c соответственно?

Ответ: 0,194; 0,226; 0,581.

15. Некоторое изделие выпускается двумя заводами. При этом объем продукции второго завода в 3 раза превосходит объем продукции первого. Доля брака у первого завода составляет 2%, у второго – 1%. Изделия, выпущенные заводами за одинаковый промежуток времени, перемешали и направили в продажу. Какова вероятность того, что приобретено изделие со второго завода, если оно оказалось испорченным?

Начало решения. Обозначим через A событие, состоящее в том, что приобретено бракованное изделие, через H_1 и H_2 – события, состоящие в том, что изделие произведено первым и вторым заводом соответственно. Поскольку объем продукции второго завода в 3 раза больше объема продукции первого, то $P(H_1)=1/4$, $P(H_2)=3/4$. Теперь следует воспользоваться формулой Байеса.

Ответ: 0,6.

16. На рекламной фирме 21% работников получают высокую зарплату. Среди них отношение числа мужчин и женщин равно 14,6 : 6,4. Известно также, что на фирме работают 40% женщин. Выяснить, существует ли на фирме дискриминация женщин в оплате труда.

Ответ: да, поскольку труд женщин является менее оплачиваемым.

17. Из группы туристов, отправляющихся за границу, 60% владеют английским языком, 40% - французским и 10% - обоими языками. Найти вероятность того, что наугад взятый турист будет нуждаться в переводчике.

Ответ: 0,1.

18. Экономист считает, что вероятность роста стоимость акции компании в следующем году составит 0,75, если экономика страны будет на подъеме, и 0,30, если экономика не будет успешно развиваться. По мнению экспертов, вероятность экономического подъема равна 0,6. Оценить вероятность того, что акции компании поднимутся в следующем году.

Ответ: 0,57.