Уважаемые студенты.

**Задание**

1. Изучить и законспектировать материал лекции.
2. Записать все типовые задачи, рассмотренные в лекции.
3. Фотоотчет присылать на электронную почту
4. Ответить на контрольные вопросы.
5. Ответить на тесты и решить задачи для самопроверки
6. Электронная почта: ***hvastov@rambler.ru***

Лекция рассчитана на 4 академических часа

# ТЕМА: ПОНЯТИЕ О НЕЗАВИСИМОСТИ СОБЫТИЙ. СОБЫТИЕ, ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ, СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

План

1. Предмет теории вероятностей.
2. Основные понятия теории вероятностей.
3. Случайные события: достоверные, невозможные, несовместные, совместные, равновозможные.
4. Вероятность событий.
5. Решение исторической задачи.

## 1. Предмет теории вероятностей

Любая точная наука изучает не сами явления, протекающие в природе, в обществе, а их математические модели, т. е. описание явлений при помощи набора строго определенных символов и операций над ними. При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы, закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта (наблюдения, эксперимента) по его

заданным начальным условиям. Этим и занимаются большинство математических (и других) дисциплин.

Однако есть множество задач, для решения которых приходится (надо!) учитывать и случайные факторы, придающие исходу опыта элемент неопределенности. Например, в вопросах стрельбы по цели невозможно без учета случайных факторов ответить на вопрос: сколько ракет нужно потратить для поражения цели? Невозможно предсказать, какая сторона выпадет при бросании монеты? Сколько лет проживет родившийся сегодня ребенок? Сколько времени проработает купленный нами телевизор? Сколько студентов опоздает на лекцию по теории вероятностей? И т.д. Такие задачи, исход которых нельзя предсказать с полной уверенностью, требуют изучения не только основных, главных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и случайных, второстепенных факторов. Выявленные в таких задачах (опытах) закономерности называются статистическими (или вероятностными). Статистические закономерности исследуются методами специальных математических дисциплин – теории вероятностей и математической статистики.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы – математические модели.

Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений. При этом под случайным явлением понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). Примеры случайных явлений: выпадение герба при. подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т. п.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

Теория вероятностей как самостоятельная наука возникла в середине XVIII столетии, когда были очень популярны азартные игры, то есть игры, в которых результат зависел лишь от случая (от французского слова hazard – «случай»). К таким играм принадлежит игра «в орлянку», игры с кубиком, некоторые карточные игры и т. д. и т. п. В переписке Б. Паскаля и П. Ферма по поводу задач, которые появились вместе с азартными играми, было введено понятие вероятностей и математического ожидания. Для решения этих задач существующий тогда аппарат оказался недостаточным и были заложены основы новой науки.

Как именно азартные игры повлияли на развитие теории вероятностей рассмотрим немного позднее.

## 2. Основные понятия теории вероятностей

К основным понятиям ТВ относятся понятия события и испытания.

Под испытанием (опытом) понимают реализацию данного комплекса условий, в результате которого непременно произойдет какое-либо событие.

Событие –это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит в определенных условиях.

Пример 1. Бросание монеты – это испытание, а появление герба или решка – это события.

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел–это испытание. Попадание в определенную область мишени – событие.

Пример 3. В урне имеются цветные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появление шара

определенного цвета – событие.

Задание 1. Отделите события и испытания и запишите результаты в таблицу 1.1:

А. тянем карту из колоды – появляется пиковый король;

Б. достаем лампу из коробки, а она бракованная;

В. слышим голос знакомого, наугад набрав номер телефона;

Г. на экзамене вытянули билет № 13;

Д. открываем почтовый ящик и находим письмо;

Е. стреляем и попадаем в цель. Таблица 1.1

| | испытания | события |
|---|---|---|
| А | | |
| Б | | |
| В | | |
| Г | | |
| Д | | |
| Е | | |

**3. Случайные события**

Сначала определим понятие «случайное событие» исходя из его интуитивного, наглядного понимания. Случайным нам кажется то, что нарушает обычный ход действий.

Например, вы спешите на занятия, садитесь на автобус, но он ломается, – и вы опаздываете на занятия. Случайное событие повлияло на ваш день, на ваш распорядок жизни.

Конечно, не всегда случайные события приносят вред. Например, вы встретили на улице своего хорошего знакомого, не договариваясь о встрече. Или, просматривая таблицу выигрышей в лотерею, находите номер своего лотерейного билета: в этом случае событие – выигрыш – вам на пользу.

Итак, проводится некоторый опыт (эксперимент, наблюдение, испытание), исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты в теории вероятностей называют случайными.

Случайным событием (или просто: событием) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти во время выполнения определенного испытания.

События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C.

Каждое случайное событие – это последствия многих случайных или неизвестных нам причин, которые влияют на событие. Поэтому невозможно предусмотреть последствия одинарного испытания.

Пример 4. Опыт: бросание игральной кости; событие A – выпадение 5 очков, событие B – выпадение четного числа очков, событие C – выпадение 7 очков, событие D – выпадение целого числа очков, событие E – выпадение не менее 3-х очков.

Достоверным событием называют такое событие, которое в рассмотренных условиях обязательно произойдет.

Невозможные события – это события, которые в рассмотренных условиях не могут появиться вместе.

Например, если в урне есть только белые шары, то вынимание белого шара из урны – достоверное событие, а шара другого цвета – невозможное.

Задание 2. Какие из событий – достоверные:

А. «два попадания при трех выстрелах»;

Б. «наугад набранное трехзначное число не больше 1000»;

В. «выпадение 12 очков при бросании двух игральных кубиков»;

Г. «выпадение цифры 9 при бросании монеты»;

Д. «четыре попадания при трех выстрелах»;

Е. «выпадение 13 очков при бросании двух игральных кубиков».

Случайные события $A_1$, $A_2$, …, $A_n$ образу ют полную группу событий, если вследствие испытаний хотя бы одно из них появится обязательно.

Пример 5. Бросают шестигранный кубик. Обозначим события так:

А1 – выпала грань 1;

А2 – выпала грань 2;

А3 – выпала грань 3;

А4 – выпала грань 4;

А5 – выпала грань 5;

А6 – выпала грань 6.

События А1, А2, …, А6 образуют полную группу.

Задание 3. Образуют ли полную группу такие группы событий:

а) испытание – бросают монету; события:

А1 – «появился герб»;

А2 – «появилась надпись».

б) испытание – бросают две монеты; события: А1 – «появление двух гербов»;

А2 – «появление двух надписей».

в) испытание – два выстрела по мишени; события: А1 – «ни одного попадания»;

А2 – «одно попадание»;

А3 – «два попадания».

Ответы: а) да; б) нет; в) да.

События называют несовместными, если появление одного из них влечет появление других событий в одном и том же испытании.

Например, среди готовых деталей в ящике есть стандартные и нестандартные, наугад вынимают из ящика одну деталь. События: А – «взята стандартная деталь»; и В – «взята нестандартная деталь» – несовместные потому, что взята лишь одна деталь, которая не может быть одновременно стандартной и нестандартной.

События называют совместными, если появление одного из них не исключает возможности появление других событий в одном и том же испытании (не обязательно одновременно).

Например, два стрельца стреляют в мишень. События: А – «первый стрелец попал в мишень»; и В – «второй стрелец попал в мишень» – совместные.

Задание 4. Какие из событий – совместны, а какие – несовместны:

а) испытание – бросают монету; события:

А1 – «появился герб»;

А2 – «появилась надпись».

б) испытание – бросают две монеты; события:

А1 – «появление герба на первой монете»;

А2 – «появление надписи на второй монете».

в) испытание – вытягивание двух карт из колоды; события:

А1 – «появление двух черных карт»;

А2 – «появление туза»;

А3 – «появление дамы».

Ответы: а) несовместные; б) совместные; в) совместные.

События называют равновозможными, если нет причин утверждать, что какое-нибудь из них более возможно, чем другие. Например, Событие – появление 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игрального кубика – равновозможные при условии, что его центр тяжести не смещен.

Задание 5. Равновозможные ли события:

а) испытание – бросают монету; события: А1 – «появился герб»;

А2 – «появилась надпись».

б) испытание – бросают неправильную монеты(согнутую); события:

А1 – «появился герб»;

А2 – «появилась надпись».

в) испытание – вытягивание одной карты из колоды; события:

А1 – «появление карты червовой масти»;

А2 – «появление карты бубновой масти»;

А3 – «появление карты пиковой масти»;

А4 – «появление карты крестовой масти»;

г) испытание – бросают две монеты; события:

А1 – «появление двух гербов»;

А2 – «появление двух надписей»;

А3 – «появление одного герба и одной надписи».

Ответы: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

**4. Вероятность событий**

Если рассматривать случайное событие много раз при одинаковых условиях, то можно обнаружить определенную закономерность её появления. Такую закономерность называют вероятной закономерностью массовых однородных случайных событий.

В теории вероятностей под массовыми однородными случайными событиями понимают такие события, которые осуществляются много раз и при одинаковых условиях или много одинаковых событий.

Например, подбросить монету 1000 раз или 1000 монет подбросить один раз в теории вероятностей считают одинаковыми событиями.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных массовых однородных случайных событий.

Например, когда в семье ожидается пополнение, никто не может предугадать мальчик это будет или девочка. Даже, если ожидают, что в семье будет несколько детей, то и тогда нельзя сказать наперед сколько из них будет мальчиков. Но во всех странах и среди всех народов на 1000 новорожденных в среднем приходится 511 мальчиков 489 девочек; эта удивительная постоянность рождения мальчиков и девочек отмечалась многими учеными, среди которых был и один из основателей теории вероятностей – французский математик Симон Лаплас (1749-1827). Просматривая в свое время списки новорожденных по Парижу за 1745-1784 годы, Лаплас выявил отношение числа мальчиков к общему числу новорожденных, оно оказалось равным 0,510, то есть меньше 0,511. Не смотря на то, что разница была очень маленькой, Лаплас сделал вывод, что есть какая-то причина, которая

увеличивает число девочек, хотя число родов в Париже за 39 лет и в то время было очень большим; поэтому даже маленькое отклонение нельзя было объяснить случайным событием. И действительно, Лаплас нашел причину отклонения: она заключалась в том, что в число детей, рожденных в Париже, входили также дети, подкинутые в специальный приют – единственный на всю Францию. Так как французские крестьяне ценили в сыновьях будущих работников, то они чаще подкидывали девочек, чем мальчиков. Отсчитав подкидышей-девочек, Лаплас получил и для Парижа обычное отношение числа мальчиков к числу девочек.

Попробуем теперь выразить данную закономерность через язык математики. Пусть имеем событие А, которое в каждом отдельном случае может произойти или нет. Пусть проведено N испытаний, из которых в M случаях событие А произошло, а в N-M случаях – нет. Частота события А будет $\frac{M}{N}$. Эта числовая мера степени объективной возможности события называется вероятностью события. Обозначается P(A). А формула $P(A)=\frac{m}{n}$ носит название классического определения вероятности. Её предложили Б. Паскаль и П. Ферма. Где n – общее число событий, а m – число благоприятных событий.

Задание 6. Определите вероятность:

А. достоверного события;

Б. невозможного события.

Ответы: А. 1; Б. 0

Решение

Пример 1 В урне (емкости) находятся 12 белых и 8 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар будет белым?

Решение

Пусть А – событие, состоящее в том, что вынут белый шар. Ясно, что n = 12+ 8=20 – число всех равновозможных случаев (исходов опыта). Число

случаев, благоприятствующих событию А, равно 12, т.е. m = 12. Следовательно, по формуле имеем: $P(A)=\frac{12}{20}=0{,}6$

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана верная цифра.

Решение

Событие А – набрана нужная цифра. Число элементарных исходов – 10, число благоприятных – 1. Вероятность : $P(A)=\frac{1}{10}$.

Пример 3. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что выпало больше 4 очков.

Решение

Событие А – выпало больше 4 очков. Число элементарных исходов опыта – 6. Число благоприятных – 2. Вероятность: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние 2 цифры и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение

Событие В – набраны две нужные цифры. Всего возможно набрать столько пар цифр, сколько размещений $A_{10}^{2}=10*9=90$. Таким образом, общее число возможных элементарных исходов равно 90. Благоприятный же исход всего 1. Искомая вероятность $P(B)=\frac{1}{90}$.

Пример 5. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

Решение

Пусть событие А – 3 выбранных наудачу студента – разрядники. Общее число случаев выбора 3 студентов из 30 равно $n=C_{30}^{3}$, так как комбинации из 30 студентов по 3 представляют собой сочетания, т.к. отличаются только

составом студентов. Точно так же число случаев, благоприятствующих событию А равно $m = C_{10}^{3}$. Итак $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3}}{C_{30}^{3}} = 61/203 = 0{,}030$

Пример 6. В партии з 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых 6 наудачу деталей 4 стандартных.

Решение

Общее число элементарных исходов $C_{10}^{6}$. Благоприятные – четыре стандартные детали из 7 – $C_{7}^{4}$. Остальные 6-4 должны быть нестандартными, их можно взять $C_{3}^{2}$ способами. Число благоприятных исходов $C_{7}^{4}C_{3}^{2}$.

Искомая вероятность $P = \frac{C_{7}^{4}C_{3}^{4}}{C_{10}^{6}}$ =5/10=0,5.

Пример 7. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Наугад выбирают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.

Решение

$$P = \frac{C_{5}^{2}C_{10}^{4}}{C_{15}^{6}} = \frac{2100}{5005} = 0{,}4196.$$

Пример 8. В ящике 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынуты 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара?

Решение

$$P = \frac{C_{15}^{3}C_{9}^{2}C_{6}^{1}}{C_{30}^{6}} = 24/145 = 0{,}17.$$

**5. Решение исторической задачи**

Один французский рыцарь, кавалер де Мере, был пристрастным игроком в кости. Он все время пытался разбогатеть за счет игры и для этого придумывал разные сложные правила, которые ему казалось, приведут его к

его мечте. В то время (XVII ст.) желание разбогатеть при помощи азартных игр охватило, как болезнь, многих людей.

Де Мере придумал, вообще, такие правила игры: он предлагал бросать кость четыре раза подряд и бился об заклад, что при этом хотя бы один раз выпадет 6; если же этого не произойдет – ни разу, то выигрывает противник. Де Мере считал, что он будет чаще выигрывать, чем проигрывать, но все же обратился к своему знакомому, одному из лучших математиков XVII ст. – Б. Паскалю (1623-1662) с просьбой подсчитать, какова вероятность выигрыша в придуманной им игре.

При каждом отдельном бросании вероятность выпадения 6 равна $\frac{1}{6}$.

А того, что не выпадет – $\frac{5}{6}$.

Далее: бросаем кость дважды. Повторяем опыт, который состоит в двухразовом броске, скажем N раз. Тогда приблизительно в $\frac{5}{6}$ раз из этих N случаев на кости, брошенной в первый раз, не выпадет 6 очков. Из числа этих $\frac{5}{6}$ N – случаев приблизительно в $\frac{5}{6}$, то есть всего в $\frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}N\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^2 N$ случаев не выпадет 6 очков и при другом бросании кости.

Таким образом, вероятность того, что при двухразовом бросании кости ни единого раза не выпадет 6 очков, равна: $\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{36}$.

Точно так рассчитывается, что вероятность того, что ни единого разу не выпадет 6 очков и при трехразовом бросании кости, равна: $\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.

И наконец, вероятность того, что при четырехразовом бросании ни единого разу не выпадет 6 очков, равна: $\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{2196}$.

Таким образом, для рыцаря де Мере вероятность проигрыша равнялась $\frac{625}{1296} < \frac{1}{2}$, то есть, вероятность выигрыша была больше половины. Значит при каждой игре больше половины шансов были за то, что рыцарь выиграет. При многоразовом повторе игры он почти наверняка оставался в выигрыше.

Действительно, чем больше играл рыцарь, тем больше он выигрывал. Кавалер де Мере был очень доволен и решил, что открыл правильный способ обогащения. Однако. Постепенно другим игрокам стало понятным, что игра для них бесполезна, и они перестали играть с де Мере. Необходимо было придумывать иные правила, и де Мере придумал новую игру. Но на этот раз он ошибся. Чем больше играл, тем больше проигрывал, и в конце концов остался нищим.

Самое интересное в этом историческом анекдоте то, что благодаря таким вот «практическим вопросам» появилась теория расчетов случайных событий. И если в те времена ученые удивлялись таким примерам, как «интересным случаям", то в наше время основные понятия, методы, теоремы и формулы теории вероятностей эффективно используются в технике, экономике, в теории надежности и массового обслуживания, в планировании и организации производства, в страховой и налоговой службах, в социологии, в демографии и охране здоровья.

**Контрольные вопросы:**

1. Что изучает теория вероятностей? Какие основные понятия ТВ вы знаете?
2. Что такое случайное событие?
3. Какие события называются достоверными, невозможными, совместными, несовместными, равновозможными?
4. Что такое вероятность? Дайте классическое определение вероятности.

Тесты и задачи для самопроверки

1. В ящике лежат 4 карточки, на которых написаны числа 1,2,3 и 5. Какова вероятность того, что произведение чисел, записанных на 2 наугад вынутых карточках, окажется нечетным числом?

А) $\frac{3}{4}$; Б) $\frac{2}{5}$; В) $\frac{1}{4}$; Г) $\frac{1}{2}$.

2. Чему равна вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет число, которое больше 2?

А) $\frac{1}{6}$; Б) $\frac{1}{3}$;В) $\frac{1}{2}$; Г) $\frac{2}{3}$.

3. В коробке было 18 зеленых и 12 голубых шариков. Какова вероятность того, что выбранный наугад шарик окажется голубым?

А) $\frac{2}{3}$; Б) $\frac{2}{5}$; В) $\frac{3}{4}$; Г) $\frac{3}{5}$.

4. В коробке лежат 18 карточек, пронумерованных числами от 1 до 18.из коробки наугад взяли одну карточку. Какова вероятность того, что на ней написано число, в записи которого отсутствует цифра 1?

А) $\frac{1}{2}$; Б) $\frac{4}{9}$; В) $\frac{1}{3}$; Г) $\frac{5}{9}$.

Задачи

Из 500 наудачу взятых деталей 8 оказалось бракованными. Найти частоту бракованных деталей.

Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна частота рождения мальчиков?

В результате 30 выстрелов по мишени получено 18 попаданий. Какова частота попаданий?

Частота всхожести семян 0,97. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян высеяли?