Задание

1. Изучить материал лекции, законспектировать решение транспортной задачи. Ответить на контрольные вопросы (отметить ответы в конспекте).

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311.

Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Исследование операций - научная дисциплина, занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными системами. Задачи этой дисциплины относится к вероятностным, поэтому в рамках изучения «Теории вероятностей и математической статистики» рассмотрим некоторые задачи исследования операций.

Управление любой системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса. Для этого все параметры, характеризующие процесс и внешние условия, должны быть количественно определены, измерены. Следовательно, цель исследования операций - *количественное обоснование принимаемых решений по организации управления.*

При решении конкретной задачи управления применение методов исследования операций предполагает:

построение экономических и математических моделей для задач принятия решения в сложных ситуациях или в условиях неопределенности;

изучение взаимосвязей, определяющих впоследствии принятие решений, и установление критериев эффективности, позволяющих оценивать преимущество того или иного варианта действия.

Примерами задач исследования операций, отражающих его специфику, могут служить следующие задачи.

Задача 1. Для обеспечения высокого качества выпускаемых изделий на предприятии организуется система выборочного контроля. Требуется выбрать такие формы его организации - например, назначить размеры контрольных партий, указать последовательность контрольных операций, определить правила отбраковки, - чтобы обеспечить необходимое качество при минимальных расходах.

Задача 2. Для реализации определенной партии сезонных товаров создается сеть временных торговых точек. Требуется выбрать параметры сети - число точек, их размещение, количество персонала - так, чтобы обеспечить максимальную экономическую эффективность распродажи.

Задача 3. К заданному сроку необходимо провести массовое медицинское обследование группы населения с целью выявления определенных заболеваний. На обследование выделены материальные средства, оборудование, персонал. Требуется разработать такой план обследования - установить число медпунктов, их размещение, вид и количество анализов, чтобы выявить как можно больший процент из числа заболевших.

Необходимо отметить также задачи об использовании ресурсов (планирования производства), о смесях, об использовании мощностей (загрузке оборудования), о раскрое материалов, транспортную задачу и др., в которых требуется найти решение, когда некоторый *критерий эффективности* (например, прибыль, выручка, затраты ресурсов и т.п.) принимает максимальное или минимальное значение.

Приведенные задачи относятся к разным областям практики, но в них есть общие черты: в каждом случае речь идет о каком-то *управляемом мероприятии (операции),* преследующем определенную *цель.* В задаче 1 - это организация выборочного контроля с целью обеспечить качество выпускаемой продукции; в задаче 2 - организация временных торговых точек

с целью проведения сезонной распродажи; в задаче 3 - массовое медицинское обследование с целью определения процента заболевших. В каждой задаче заданы некоторые *условия* проведения этого мероприятия, в рамках которых следует принять *решение* - такое, чтобы мероприятие принесло определенную выгоду. Условиями проведения операции в каждой задаче оказываются средства, которыми мы располагаем, время, оборудование, технологии, а решение в задаче 1 заключается в выборе формы контроля - размера контрольных партий, правил отбраковки; в задаче 2 - в выборе числа точек размещения, количества персонала; в задаче 3 - в выборе числа медпунктов, вида и количества анализов.

Основные понятия и определения исследования операций.

Операция - любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели. Результат операции зависит от способа ее проведения, организации, иначе - от выбора некоторых параметров.

Всякий определенный выбор параметров называется *решением. Оптимальными* считают те решения, которые по тем или иным соображениям предпочтительнее других. Поэтому *основной задачей исследования операций является предварительное количественное обоснование оптимальных решений.*

Замечание 1. Следует обратить внимание на постановку проблемы: само *принятие решений* выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции ответственного лица или группы лиц, которые могут учитывать и другие соображения, отличные от математически обоснованных.

Замечание 2. Если в одних задачах исследования операций оптимальным является решение, при котором некоторый критерий эффективности принимает максимальное или минимальное значение, то в других задачах это вовсе не обязательно. Так, в задаче 2 оптимальным можно считать такое количество торговых точек и персонала в них, при котором

среднее время обслуживания покупателей не превысит, например, 5 мин, а длина очереди в среднем в любой момент окажется не более 3 человек.

Модель и эффективность операции. Для применения количественных методов исследования требуется построить *математическую модель операции.* При построении модели операция, как правило, упрощается, схематизируется и схема операции описывается с помощью того или иного математического аппарата. *Модель операции* - это достаточно точное описание операции с помощью математического аппарата (различного рода функций, уравнений, систем уравнений и неравенств и т.п.).

Эффективность операции - степень ее приспособленности к выполнению задачи - количественно выражается в виде критерия эффективности -- целевой функции. Например, в задаче об использовании ресурсов критерий эффективности - прибыль от реализации произведенной продукции, которую нужно максимизировать, в транспортной задаче - суммарные затраты на перевозку грузов от поставщиков к потребителям, которые нужно минимизировать. Выбор критерия эффективности определяет практическую ценность исследования.

Общая постановка задачи исследования операции. Все факторы, входящие в описание операции, можно разделить на две группы:

постоянные факторы (условия проведения операции), на которые мы влиять не можем. Обозначим их через a_1, a_2, ...;

зависимые факторы (элементы решения) x_1, x_2, ...; которые в известных пределах мы можем выбирать по своему усмотрению.

Например, в задаче об использовании ресурсов к постоянным факторам следует отнести запасы ресурсов каждого вида, производственную матрицу, элементы которой определяют расход сырья каждого вида на единицу выпускаемой продукции каждого вида. Элементы решения - план выпуска продукции каждого вида.

Критерий эффективности, выражаемый некоторой функцией, называемой *целевой,* зависит от факторов обеих групп, поэтому целевую функцию Z можно записать в виде

$Z = f(x_1, x_2, ...; a_1, a_2, ...)$

Все модели исследования операций могут быть классифицированы в зависимости от природы и свойств операции, характера решаемых задач, особенностей применяемых математических методов.

Следует отметить прежде всего большой *класс оптимизационных моделей.* Такие задачи возникают при попытке оптимизировать планирование и управление сложными системами, в первую очередь экономическими системами. Оптимизационную задачу можно сформулировать в общем виде: *найти переменные* x_1, x_2, ...x_n, *удовлетворяющие системе неравенств (уравнений)*

$q_i = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$

и *обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию, т.е.*

$Z = f(x_1, x_2, ...; a_1, a_2, ...) \rightarrow \max (\min)$

(Условия неотрицательности переменных, если они есть, входят в ограничения.

Как известно, упорядоченная совокупность значений *n* переменных x_1, x_2, ... x_n представляется точкой n-мерного пространства. В дальнейшем эту точку будем обозначать $X = (x_1, x_2, ... x_n)$), а само оптимальное решение $X^* = (x_1, x_2, ... x_n)$.

Рассмотрим задачу, характерную для исследования операций - *классическую задачу потребления,* имеющую важное значение в экономическом анализе.

Пусть имеется *n* видов товаров и услуг, количества которых (в натуральных единицах) x_1, x_2, ..., x_n по ценам соответственно p_1, p_2, ..., p_n за единицу. Суммарная стоимость этих товаров и услуг составляет

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Уровень потребления Z может быть выражен некоторой функцией $Z= f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называемой *функцией полезности. Необходимо найти такой набор товаров и услуг* $x_1, x_2, ..., x_n$ *при данной величине доходов I,* чтобы *обеспечить максимальный уровень потребления,* т.е.

$$Z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le I$$

$x_i \ge 0$ (i = 1, 2, …, n)

Решения этой задачи, зависящие от цен $p_1, p_2, ..., p_n$ и величины дохода I, называются *функциями спроса.*

Рассмотренная задача потребления, так же как и многие другие, является частным случаем сформулированной выше общей задачи на определение экстремума функции *n* переменных при некоторых ограничениях, т.е. задачей на *условный экстремум.*

В тех случаях, когда функции f и q_i, в общей задаче хотя бы дважды дифференцируемы, можно применять *классические методы оптимизации.* Однако применение этих методов в исследовании операций весьма ограниченно, так как задача определения условного экстремума функции n переменных технически весьма трудна: метод дает возможность определить локальный экстремум, а из-за многомерности функции определение ее максимального (или минимального) значения (глобального экстремума) может оказаться весьма трудоемким - тем более, что этот экстремум возможен на границе области решений. Классические методы вовсе не работают, если множество допустимых значений аргумента дискретно или функция Z задана таблично. В этих случаях для решения общей задачи применяются методы *математического программирования.*

По своей содержательной постановке множество других, типичных задач исследования операций может быть разбито на ряд классов.

Задачи сетевого планирования и управления рассматривают соотношения между сроками окончания крупного комплекса операций (работ) и моментами начала всех операций комплекса. Эти задачи состоят в нахождении минимальных продолжительностей комплекса операций, оптимального соотношения величин стоимости и сроков их выполнения.

Задачи массового обслуживания посвящены изучению и анализу систем обслуживания с очередями заявок или требований и состоят в определении показателей эффективности работы систем, их оптимальных характеристик, например, в определении числа каналов обслуживания, времени обслуживания и т.д.

Задачи управления запасами состоят в отыскании оптимальных значений уровня запасов (точки заказа) и размера заказа. Особенность таких задач заключается в том, что с увеличением уровня запасов, с одной стороны, увеличиваются затраты на их хранение, но с другой стороны, уменьшаются потери вследствие возможного дефицита запасаемого продукта.

Задачи распределения ресурсов возникают при определенном наборе операций (работ), которые необходимо выполнять при ограниченных наличных ресурсах, и требуется найти оптимальные распределения ресурсов между операциями или состав операций.

Задачи ремонта и замены оборудования актуальны в связи с износом и старением оборудования и необходимостью его замены с течением времени. Задачи сводятся к определению оптимальных сроков, числа профилактических ремонтов и проверок, а также моментов замены оборудования модернизированным.

Задачи составления расписания (календарного планирования) состоят в определении оптимальной очередности выполнения операций (например, обработки деталей) на различных видах оборудования.

Задачи планирования и размещения состоят в определении оптимального числа и места размещения новых объектов с учетом их взаимодействия с существующими объектами и между собой.

Задачи выбора маршрута, или *сетевые* задачи, чаще всего встречаются при исследовании разнообразных задач на транспорте и в системах связи, и состоят в определении наиболее экономичных маршрутов.

Среди моделей исследования операций особо выделяются модели принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях, изучаемые *теорией игр.* К конфликтным ситуациям, в которых сталкиваются интересы двух (или более) сторон, преследующих разные цели, можно отнести ряд ситуаций в области экономики, права, военного дела и т. п. В задачах теории игр необходимо выработать рекомендации по разумному поведению участников конфликта, определить их оптимальные стратегии.

На практике в большинстве случаев успех операции оценивается не по одному, а сразу по нескольким, критериям, один из которых следует максимизировать, другие – минимизировать, так называемые *многокритериальные задачи*.

Для того чтобы из множества критериев, в том числе и противоречащих друг другу (например, прибыль и расход), выбрать целевую функцию, необходимо установить *приоритет* критериев. Обозначим $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ (здесь x - условный аргумент). Пусть они расположены в порядке убывания приоритетов. В зависимости от определенных условий возможны в основном два варианта:

- в качестве целевой функции выбирается критерий $f_1(x)$, обладающий наиболее высоким приоритетом;

- рассматривается комбинация

$$f(x) = w_1f_1(x) + w_2f_2(x) +\ldots+ w_nf_n(x),$$

где w_1 w_2, …, w_n некоторые коэффициенты (веса).

Величина f(x), учитывающая в определенной степени все критерии, выбирается в качестве целевой функции.

В условиях определенности w_i - числа, $f_i(x)$ - функции. В условиях неопределенности $f_i(x)$ могут оказаться случайными и вместо $f(x)$ в качестве

целевой функции следует рассматривать математическое ожидание суммы $f(x)=w_1f_1(x)+w_2f_2(x)+\ldots+ w_nf_n(x)$.

Попытка сведения многокритериальной задачи к задаче с одним критерием эффективности (целевой функцией) в большинстве случаев не дает удовлетворительных результатов. Другой подход состоит в отбрасывании ("выбраковке") из множества допустимых решений заведомо неудачных решений, уступающих другим по *всем критериям.* В результате такой процедуры остаются так называемые *эффективные* (или "*паретовские")* решения, множество которых обычно существенно меньше исходного. А окончательный выбор "компромиссного" решения (не оптимального по всем критериям, которого, как правило, не существует, а *приемлемого* по этим критериям) остается за человеком - лицом, принимающим решение.

ПЕРЕВОЗКА ГРУЗОВ
(транспортная задача)

В современных условиях большие транспортные расходы связаны с простоями в ожидании обслуживания на погрузочно-разгрузочных работах, порожними пробегами, встречными и нерациональными перевозками, расходами на бензин, техническое обслуживание и заработную плату водителей. В связи с этим необходимо решать задачи оптимального планирования перевозок грузов из пунктов отправления в пункты назначения методами, позволяющими оптимизировать план по какому-либо экономическому показателю, например финансовых затрат или времени на перевозки грузов.

Для решения подобного рода задач существуют в линейном программировании специально разработанные методы, а задачи такого рода называются транспортными задачами.

МЕТОД ПОТЕНЦИАЛОВ

Задача: От нескольких поставщиков A_1, A_2, …, A_i, …, A_n к нескольким потребителям B_1, B_2, …, B_j, …, B_m перевозят груз. Запасы груза у каждого поставщика a_1, a_2, …, a_i, …, a_n, потребности потребителей b_1, b_2, …, b_j, …, b_m, и стоимость перевозок от каждого потребителя к каждому поставщику d_{ij} известны.

Спланируйте перевозку груза от поставщиков к потребителям так, чтобы транспортные расходы были минимальными.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Критерием оптимальности является стоимость перевозок всех грузов, которая должна быть минимальной.

$$F(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

Условия неотрицательности переменных

$$x_{ij} \geq 0$$

Следует иметь в виду, что:

1. Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений, определяемое матрицей X = (x_{ij}), i = $\overline{1,m}$; j = $\overline{1,n}$; называется допустимым планом транспортной задачи.

2. Ранг матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений транспортной задачи, на единицу меньше числа уравнений, т. е. равен (m+n-1). Следовательно, число линейно независимых уравнений равно (m + n - 1), они образуют базис, а соответствующие им (m + n - 1) переменных будут являться базисными.

3. Допустимый план транспортной задачи, имеющий не более (m + n - 1) отличных от нуля величин x_{ij}, называется опорным.

4. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности (m+n-1), то план является невырожденным, если меньше, то план называется вырожденным.

5. План X = (x_{ij}) (i = $\overline{1,m}$; j = $\overline{1,n}$), при котором целевая функция принимает свое минимальное значение, называется оптимальным планом.

6. Для решения транспортной задачи необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы груза в пунктах отправления были равны сумме заявок пунктов назначения:

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_i} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b_j}$$

7. Модель транспортной задачи, удовлетворяющая условию (7.1), называется закрытой. Если же указанное условие не выполняется, то модель называется открытой.

В случае превышения запаса над заявками

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_i} > \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b_j}$$

вводится фиктивный (n + 1) пункт назначения с потребностью

$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_i} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b_j}$ и соответствующие тарифы считаются равными нулю: $C_{i,n+1} = 0$, i = 1, m.

При $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_i} < \sum_{j=1}^{n} \mathbf{b_j}$, вводится фиктивный (m + 1) пункт отправления с запасом груза

$a_{m+1} \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b_j} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_i}$ и соответствующие тарифы принимаются равными нулю: : $C_{m+1,j} = 0$, j = 1, n.

8. Наилучшим элементом матрицы тарифов C называется наименьший тариф, если задача поставлена на минимум, наибольший тариф - если задача поставлена на максимум целевой функции.

Рассмотрим один из методов построения первого опорного плана - метод наименьших тарифов (стоимости).

Алгоритм построения первого опорного плана методом наименьшей стоимости включает следующие этапы:

а) среди тарифов находится наименьший;

б) клетка с выбранным тарифом заполняется величиной, равной максимально возможному объему груза с учетом ограничений по строке и столбцу. При этом либо весь груз вывозится от соответствующего поставщика, либо полностью удовлетворяется заявка потребителя. Строка или столбец таблицы вычеркивается и в дальнейшем распределении не участвует;

в) из оставшихся тарифов вновь находится наилучший (наименьший), и процесс продолжается до тех пор, пока не будет распределен весь груз.

Если модель транспортной задачи открытая и введены фиктивный поставщик или потребитель, то распределение осуществляется сначала для действительных поставщиков и потребителей, и в последнюю очередь нераспределенный груз направляется от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю.

9. Дальнейшее улучшение первого опорного плана и получение оптимального плана производим методом потенциалов, который основан на теории двойственности.

План X = (x_{ij}) транспортной задачи будет являться оптимальным, если существует система m + n чисел α_i, β_j, называемых потенциалами, удовлетворяющая условиям:

1. $F(\bar{\mathbf{X}}) \to \min$

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_j = C_{ij} \cdot \text{для} \cdot \text{занятых} \cdot \text{клеток,} \cdot \text{где} \cdot x_{ij} > 0 \\ \alpha_i + \beta_j \le C_{ij} \cdot \text{для} \cdot \text{занятых} \cdot \text{клеток,} \cdot \text{где} \cdot x_{ij} = 0 \end{cases}$$

2. $F(\bar{\mathbf{X}}) \to \max$

$$\begin{cases} \alpha_i + \beta_j = C_{ij} \cdot \text{для} \cdot \text{занятых} \cdot \text{клеток,} \cdot \text{где} \cdot x_{ij} > 0 \\ \alpha_i + \beta_j \ge C_{ij} \cdot \text{для} \cdot \text{занятых} \cdot \text{клеток,} \cdot \text{где} \cdot x_{ij} = 0 \end{cases}$$

Потенциалы α_i, и β_j являются переменными двойственной транспортной задачи и обозначают оплату за перевозку единицы груза в пунктах отправления (поставщиками) и назначения (потребителями) соответственно, поэтому их сумма равна транспортному тарифу $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$, а условия (7.2),

(7.3) получены на основании второй теоремы двойственности.

Введем обозначение оценки свободной клетки таблицы

$\Delta_{ij} = \alpha_i + \beta_j - C_{ij}$

Если среди оценок Δ_{ij} нет положительных (задача поставлена на минимум), то опорный план является оптимальным.

Алгоритм оценки оптимальности плана методом потенциалов включает следующие этапы.

1. Построение первого опорного плана.

2. Проверка вырожденности плана. Потенциалы αi, и βj могут быть рассчитаны только для невырожденного плана. Если число занятых клеток в опорном плане меньше, чем (m + n - 1), то не хватит количества уравнений для определения потенциалов, поэтому вносим нуль в одну из свободных клеток таблицы так, чтобы общее число занятых клеток стало равным (m + n - 1). Нуль вводят в клетку с наименьшим тарифом, например в клетку одновременно вычеркиваемых строки и столбца таблицы при составлении нового плана. При этом фиктивно занятая нулем клетка не должна образовывать замкнутого прямоугольного контура с другими клетками таблицы.

3. Определение значения функции цели путем суммирования произведений тарифов (удельных затрат) на объем перевозимого груза по всем занятым клетками таблицы.

4. Проверка условия оптимальности. Определяем потенциалы αi; и βj. Для каждой занятой клетки таблицы записываем уравнение αi, + βj = Cij (i = 1, m; j = l, n). Получим систему (m + n - 1) уравнений с (m + n) переменными.

Так как число переменных больше числа уравнений (m + n > > m + n - 1), то система является неопределенной и имеет бесконечное множество решений. Поэтому одному из неизвестных потенциалов αi, βj задают произвольное значение, например, для простоты вычислений полагаем αi = 0. Тогда остальные потенциалы определяются из приведенных соотношений.

В транспортную таблицу добавляются дополнительная строка и столбец, куда заносятся потенциалы.

Определяем оценки свободных клеток Δij.

Если все ≤ 0 (задача решается на минимум целевой функции) либо все $\Delta ij \geq 0$ (задача решается на максимум целевой функции), то оптимальный план найден. Если хотя бы одна оценка свободной клетки $\Delta ij > 0$ (задача поставлена на минимум) или $\Delta ij < 0$ (задача поставлена на максимум), план не является оптимальным, его можно улучшить, осуществив перераспределение груза.

5. Построение нового опорного плана. Из всех положительных оценок свободных клеток выбираем наибольшую (если задача поставлена на минимум), из отрицательных - наибольшую по абсолютной величине (если задача поставлена на максимум). Клетку, которой соответствует наибольшая оценка, следует заполнить, т. е. направить груз. Заполняя выбранную клетку, необходимо изменить объемы поставок, записанных в ряде других занятых и связанных с заполняемой так называемым циклом.

Циклом, или прямоугольным контуром, в таблице условий транспортной задачи называется ломаная линия, вершины которой расположены в занятых клетках таблицы, а звенья - вдоль строк и столбцов, причем в каждой вершине цикла встречаются ровно два звена, одно из которых находится в строке, другое - в столбце. Если ломаная линия, образующая цикл, пересекается, то точки пересечения не являются вершинами. Для каждой свободной клетки таблицы можно построить единственный цикл.

Вершинам цикла, начиная от вершины, находящейся в свободной клетке, присваиваем поочередно знаки «+» и «-».

Из объемов груза, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее и обозначим его γ. Перераспределяем величину γ по циклу, прибавляя γ к соответствующим объемам груза, стоящим в плюсовых клетках и вычитая γ из объемов груза, находящихся в минусовых клетках таблицы. В результате

клетка, которая ранее была свободной, становится занятой, а одна из занятых клеток цикла становится свободной.

Полученный новый опорный план проверяется на оптимальность, т. е. возвращаемся к четвертому этапу алгоритма.

Примечания:

1. Если в минусовых клетках построенного цикла находятся два (или несколько) одинаковых минимальных значения x_{ij} то при перераспределении объемов груза освобождаются две (или несколько) клеток, и план становится вырожденным. Для продолжения решения необходимо одну или несколько освобождающихся клеток таблицы занять нулем, причем предпочтение отдается клетке с наилучшим тарифом. Нулей вводится столько, чтобы во вновь полученном опорном плане число занятых клеток было равно (m + n - 1).

2. Если в оптимальном плане транспортной задачи оценка свободной клетки равна нулю ($\Delta ij = 0$), то задача имеет множество оптимальных планов. Для клетки с нулевой оценкой можно построить цикл и перераспределить груз. В результате полученный оптимальный план будет иметь такое же значение целевой функции.

3. Значение целевой функции на каждой итерации можно рассчитать следующим образом:

$F(X_k) = F(X_{k-1}) - \gamma\Delta_{ij}$ (задача поставлена на минимум);

$F(X_k) = F(X_{k-1}) - \gamma\Delta_{ij}$ (задача поставлена на максимум),

где γ — величина перемещаемого по циклу объема груза;

Δ_{ij} — оценка свободной клетки, в которую направляется груз при переходе к новому плану;

$F(X_k)$ - значение целевой функции на k-й итерации;

$F(X_{k-1})$ значение целевой функции на предыдущей итерации.

Пример 1. На три базы A_1, A_2, A_3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 6, 8, 10 ед. Этот груз требуется

перевезти в четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4, соответственно в количествах 4, 6, 8, 8 ед. Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов (тыс. грн. за ед. груза):

$$Cij = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{8} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Надо составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными издержками.

Решение:

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

$$\sum_{i=1}^{3} \mathbf{a_i} = 6+8 = 24$$

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbf{b_i} = 4+6+8+8 = 26$$

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на трех базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой.

Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу A_4 с запасом груза, равным 2 ед. (26 - 24). Тарифы перевозки единицы груза из базы A_4 во все магазины полагаем равны нулю.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу 1.

$A_i \setminus B_j$		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, a_i
	$\alpha_i \setminus \beta_j$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 7$	$\beta_4 = 4$	
A_1	$\alpha_1=0$	1 4	2 2 -	4 +	3	6
A_2	$\alpha_2=1$	4	3 4 +	8 4 -	5	8
A_3	$\alpha_3= -1$	2	7	6 2	3 8	10
A_4	$\alpha_4= -7$	0	0	0 2	0	2
Потребности, b_j		4	6	8	8	$\sum \mathbf{a_i} = 26$ \ $\sum \mathbf{b_j} = 26$

1. Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи.

Среди тарифов из всей таблицы наименьшим является $C_{11} = 1$, поэтому в клетку A_1B_1 направляем максимально возможный груз. Он равен min{6,4} = 4. Тогда $X_{11} = 4$ и из базы A_1 не вывезен груз в размере 2 ед., а потребность магазина B_1 удовлетворена полностью. Столбец таблицы B_1 выходит из рассмотрения. Из оставшихся тарифов строки наименьший – $C_{12} = 2$. В клетку A_1B_2 направляем максимально возможный груз, равный min{2,6} = 2. Тогда строка выходит из рассмотрения, поскольку из базы A_1, вывезен весь груз, а потребность второго магазина не удовлетворена на 4 единицы. Из оставшихся тарифов наилучший $C_{22} = 3$ и $C_{34} = 3$. В клетку A_2B_2 направляем груз, равный min{8,4}=4. При этом вычеркивается столбец B_2 из рассмотрения. Из оставшихся тарифов наименьший $C_{34} = 3$. В клетку A_3B_4 направляем груз, равный min{10,8} = 8. При этом потребность четвертого магазина удовлетворена, а из третьей базы не вывезены 2 ед. Этот нераспределенный груз направляем в клетку A_3B_3, $x_{33} = 2$. Потребность третьего магазина не удовлетворена на 2 ед. Направим от фиктивного поставщика - базы A_4 - 2 ед. в клетку A_4B_3, т. е. $x_{43} = 2$.

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n – 1 =4+4-1 =7. Следовательно, опорный план является невырожденным.

3. Определяем значение целевой функции первого опорного плана.

F(X) = 4*1 + 2*2 +4*3 +4*8 + 2*6 + 8*3 + 2*0 = 88 тыс. грн.

4. Проверим оптимальность опорного плана. Найдем потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам таблицы, в которых $\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$ полагая, что $\alpha_i = 0$, решим систему уравнений:

Занесем найденные значения потенциалов в таблицу 1 и вычислим оценки свободных клеток $\Delta_{ij} = (\beta_j+\alpha_i) – C_{ij}$

Δ_{13} = 7+0-4 = **3**; Δ_{14} = 4+0-3 = **1**; Δ_{21} = 1+1-4 = -2; Δ_{24} = 4+1-5 = 0; Δ_{31} = 1+(-1)-2 = -2; Δ_{32} = 2+(-1)-7 = -6; Δ_{41} = 1+(-7)-0 = -6; Δ_{42} = 2+(-7)-0 = -5; Δ_{44} = 4+(-7)-0 = -3.

Первый опорный план не является оптимальным, так как $\Delta_{13} > 0$ и $\Delta_{14} > 0$, поэтому переходим к его улучшению.

5. Выбираем максимальную оценку свободной клетки $\Delta_{13} = 3$. Для клетки A1B3 построим цикл перераспределения груза. Для этого в перспективную клетку A1B3 поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «—». Цикл приведен в табл. 1.

Из чисел x_{ij}, стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т. е. γ=min{2,4}=2. Прибавляем 2 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках, и вычитаем 2 из x_{ij}, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план, приведенный в табл. 2.

Таблица 2

$A_i \setminus B_j$		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, a_i
	$\alpha_i \setminus \beta_j$	β_1= 1	β_2= -1	β_3= 4	β_4= 1	
A_1	α_1= 0	1 - 4	2	4 + 2	3	6
A_2	α_2= 4	4	3 6	8 2	5	8
A_3	α_3= 2	2 +	7	6 - 2	3 8	10
A_4	α_4= -4	0	0	0	0	2
Потребности, b_j		4	6	8	8	$\sum a_i$ =26 \ $\sum b_j$ =26

6. Определяем значение целевой функции:

$F(\overline{X_2}) = F(\overline{X_1}) - \gamma\Delta_{13}$ = 88 - 2 * 6 = 82 (тыс. грн.)

7. Количество занятых клеток в новом плане - 7, следовательно, план невырожденный.

8. Проверяем оптимальность плана методом потенциалов, для этого находим потенциалы α_i, β_j по занятым клеткам, где $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$, полагая что $\alpha_1 = 0$:

Затем рассчитываем оценки свободных клеток:

$\Delta_{12} = 0 + (-1) - 2 = -3$; $\Delta_{14} = 0 + 1 - 3 = -2$; $\Delta_{21} = 4 + 1 - 4 = \mathbf{1}$; $\Delta_{24} = 4 + 1 - 5 = 0$; $\Delta_{31} = 2 + 1 - 2 = \mathbf{1}$; $\Delta_{32} = 2 - 1 - 7 = -6$; $\Delta_{41} = -4 + 1 - 0 = -3$; $\Delta_{42} = -4 - 1 - 0 = -5$; $\Delta_{44} = -4 + 1 - 0 = -3$.

План, полученный в табл. 2, не оптимальный, так как $\Delta_{21} > 0$ и $\Delta_{31} > 0$.

9. Проводим улучшение плана II путем перераспределения грузов. В качестве перспективной клетки для загрузки выбираем A_3 B_1, в которую записываем +, затем строим цикл перераспределения, приведенный в табл. 2.

В построенном цикле определяем величину

γ = min(4,2) = 2.

Перераспределив груз, получаем новый план III, приведенный в табл. 3.

10. Количество занятых клеток 7, а должно быть m + n - 1 = 7, следовательно, план III невырожденный.

11. Вычислим значение целевой функции:

$F(\overline{X_3}) = F(\overline{X_2}) - \gamma\Delta_{31} = 82 - 2 * 1 = 80$ (тыс. грн.)

12. Проверяем оптимальность плана III методом потенциалов. Находим потенциалы по занятым клеткам.

Таблица 3

$A_i \setminus B_j$		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, a_i
	$\alpha_i \setminus \beta_j$	$\beta_1 = 1$	$\beta_2 = -1$	$\beta_3 = 4$	$\beta_4 = 2$	
A_1	$\alpha_1 = 0$	1 2 -	2	4 4 +	3	6
A_2	$\alpha_2 = 4$	4 +	3 6	8 2 -	5	8
A_3	$\alpha_3 = 1$	2	7	6 2	3 8	10
A_4	$\alpha_4 = -4$	0	0	0 2	0	2
Потребности, b_j		4	6	8	8	$\sum a_i = 26$ \ $\sum b_j = 26$

Рассчитываем оценки свободных клеток:

Δ_{12} = - 1 + 0 - 2 = -3; Δ_{14} = 2 + 0 - 3 = -1; Δ_{21} = 1 + 4 - 4 = **1**; Δ_{24} = 2 + 4 - 5 = **1**; Δ_{32} = - 1 + 1 - 7 = -7; Δ_{33} = 4 + 1 - 6 = -1; Δ_{41} = 1 + (-4) - 0 = -3; Δ_{42} = - 1 + (-4) - 0 = -5; Δ_{44} = 2 + (-4) -- 0 = -2.

План не оптимальный, так как $\Delta_{21} > 0$ и $\Delta_{24} > 0$.

13. Проводим улучшение плана III перераспределения груза. В качестве перспективной клетки для загрузки выбираем A_2, B_1, в которую записываем +, затем строки цикл перераспределения в табл. 3.

Определяем величину γ = min(2; 2) = 2. После проведения операции перераспределения получаем план IV, приведенный в табл. 4.

14. План получается вырожденный, поскольку в минусовых клетках цикла находятся два одинаковых минимальных объема, груза, равные 2. При перераспределении две клетки A_1B_1 и A_2B_3 оказались свободными, поэтому число занятых клеток (6) будет меньше, чем m + n - 1 = 7. Для продолжения решения в одну из освободившихся клеток - в клетку A_1B_1 записываем нуль, так как тариф c_{11} меньше c_{23}.

15. Вычисляем значение целевой функции:

$F(\overline{X_4}) = F(\overline{X_3}) - \gamma\Delta_{31}$ = 80 - 2 * 1 = 78 (тыс. грн.)

Таблица 4.

$A_i \setminus B_j$		B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы, a_i
	$\alpha_i \setminus \beta_j$	β_1= 4	β_2= 6	β_3= 8	β_4= 8	
A_1	α_1= 0	1 0	2	4 6	3	6
A_2	α_2= 3	4 2	3 6	8	5	8
A_3	α_3= 1	2 2	7	6	3 8	10
A_4	α_4= -4	0	0	0	0	2
Потребности, b_j		4	6	8	8	$\sum a_i$ =26 \ $\sum b_j$ =26

16. Проверяем оптимальность плана IV методом потенциалов. Находим потенциалы по занятым клеткам:

Рассчитаем оценки свободных клеток:

$\Delta_{12} = 0 + 0 - 2 = -2$; $\Delta_{14} = 2 + 0 - 3 = -1$; $\Delta_{23} = 4 + 3 - 8 = -1$; $\Delta_{24} = 2 + 3 - 5 = 0$; $\Delta_{32} = 0 + 1 - 7 = -6$; $\Delta_{33} = 4 + 1 - 6 = -1$; $\Delta_{41} = 1 + (-4) - 0 = -3$; $\Delta_{42} = 0 + (-4) - 0 = -4$; $\Delta_{44} = 2 + (-4) - 0 = -2$.

Поскольку все оценки неположительные, меньше или равны нулю, то план IV является оптимальным, что можно представить в виде следующей матрицы:

$$X_4^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad F(\overline{X_4}) = 78 \text{ (тыс. грн.)}$$

Анализ плана. С первой базы необходимо весь груз направить в третий магазин, со второй базы направить в первый и второй магазины в количестве 2 ед. и 6 ед., а груз с третьей базы следует вывозить в первый и четвертый магазины в количестве 2 и 8 ед. соответственно. При этом потребность третьего магазина B_3, остается неудовлетворенной в объеме 2 ед. Общая стоимость доставки груза потребителям будет минимальной и составляет 78 тыс. грн. Так как оценка свободной клетки $\Delta_{24} = 0$, то задача имеет множество оптимальных планов.

Контрольные вопросы

1. Как формулируется транспортная задача?
2. Как составляется первый опорный план в транспортной задаче?
3. В чем сущность метода потенциалов? Как с его помощью проверяется опорный план транспортной задачи на оптимальность?
4. Как решаются транспортные задачи с нарушенным балансом между спросом и предложением?
5. Как разрешается проблема вырождения в транспортной задаче?