Уважаемые студенты.

Задание

1. Изучить и законспектировать материал лекции.
2. Рассмотреть решение примеров.
3. Ответить на контрольные вопросы.
4. Фотоотчет присылать на электронную почту
5. Электронная почта ***hvastov@rambler.ru***

ТЕМА: Дискретная случайная величина. Числовые характеристики.

План

1. Понятие случайной величины.
2. Виды случайных величин.
3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины
4. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание случайной величины.

1. Случайная величина

Одним из важнейших понятий теории вероятностей является понятие случайной величины.

Мы уже рассматривали события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5 и б есть возможные значения этой величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожденных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин (силы и направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принадлежат некоторому промежутку (a, b).

Примеры: Количество бракованных изделий в партии деталей.

Расход электроэнергии на фирме за месяц;

Число отказов аппаратуры и т.д.

Будем далее обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, а их возможные значения − соответствующими строчными буквами x, y, z. Например, если случайная величина X имеет три возможных значения, то они будут обозначены так: x1, x2, x3.

2. Дискретные и непрерывные случайные величины

Вернемся к примерам, приведенным выше. В первом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений: 0, 1, 2, ..., 100. Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (a, b). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим возможных значений случайной величины.

Уже из сказанного можно заключить о целесообразности различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные величины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.

Дискретной (прерывной) называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Замечание. Настоящее определение непрерывной случайной величины не является точным. Более строгое определение будет дано позднее.

3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно перечислить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинаковые перечни возможных значений, а вероятности их − различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.

Законом распределения дискретной случайной величины называют всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Про случайную величину говорят, что она «распределена» по данному закону или «подчинена» этому закону распределения.

При табличном задании закона распределения дискретной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

X	x	x	..	x

	1	2		п
P	p_1	p_2	..	$p_п$

Такая таблица называется рядом распределения случайной величины.

События x1, x2, …, xn образуют полную группу, следовательно, сумма вероятностей этих событий равна единице: $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Ряд распределения может быть изображен графически – по оси абсцисс откладывают значения x, по оси ординат – значения вероятностей. Соединение полученных точек образует ломаную линию, называемую многоугольником или полигоном распределения вероятностей.

Пример 1. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Решение. Возможные значения случайной величины X – 0, 1, 2 – число сданных экзаменов. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что студент сдаст i -й экзамен. Тогда вероятности того, что студент сдаст 0, 1, или 2 экзамена будут соответственно равны (считаем события A_1, A_2 независимыми):

$$P(X = 0) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) = (1-0{,}7)(1-0{,}9) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$$

$$P(X = 1) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}34$$

$$P(X = 2) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$$

Составим ряд распределения случайной величины

X	0	1	2
P	0,03	0,34	0,63

Как уже известно, закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и

приходится ограничиваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. К числу важных; числовых характеристик относится математическое ожидание.

Математическое ожидание, как будет показано далее, приближенно равно среднему значению случайной величины. Для решения многих задач достаточно знать математическое ожидание. Например, если известно, что математическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в среднем выбивает больше очков, чем второй, и, следовательно, стреляет лучше второго. Хотя математическое ожидание дает о случайной величине значительно меньше сведений, чем закон ее распределения, но для решения задач, подобных приведенной и многих других, знание математического ожидания оказывается достаточным.

4. Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X может принимать только значения x1, x2, ..., xп, вероятности которых соответственно равны p1, p2, .. ., pп. Тогда математическое ожидание M(X) случайной величины X определяется равенством $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$.

Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	3	5	2
p	0,1	0,6	0,3

Решение

Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности: M (X) = 3·0,1 +5·0,6 + 2·0,3 = 3,9.

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании, если вероятность события A равна p.

Решение. Случайная величина X− число появлений события A в одном испытании − может принимать только два значения: x1= 1 (событие A наступило) с вероятностью p и x2= 0 (событие A не наступило) с вероятностью q = 1−p. Искомое математическое ожидание M(X) = l · p + 0 · q = p

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a, b], называют определенный интеграл $M(X) = \int_a^b xf(x)\,dx.$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx.$

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: M(C) = C.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: M(CX) = CM(X).

Свойство 3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий: M (XY) = M (X) M (Y).

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X	5	2	4
P	0,6	0,1	0,3

Y	7	9
P	0,8	0,2

Найти математическое ожидание случайной величины XY.

Решение. Найдем математические ожидания каждой изданных величин: M(X) = 5 · 0,6 + 2 · 0,1 +4 · 0,3 = 4,4; M (Y) = 7 · 0,8 + 9 · 0,9 = 7,4.

Случайные величины X и Y независимые, поэтому искомое математическое ожидание M (XY) = M (X) · M (У) = 4,4 · 7,4 = 32,56.

Свойство 4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: M(X+Y) = M(X) + M(Y).

Следствие. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Пример 2. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными p1=0,4; p2 = 0,3 и p3 = 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть случайная величина Xl, которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью p1=0,4 и 0 (промах) с вероятностью q = 1−0,4 = 0,6.

Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания, т. е. M(X) = 0,4. Аналогично найдем математические ожидания числа попаданий при втором и третьем выстрелах: M (X2) = 0,3, M (X3) = 0,6.

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоящая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов.

Искомое математическое ожидание находим по теореме о математическом, ожидании суммы: M (X) = M(X1 + X2 + X3) = M (X1) + M (X2) + M (X3) = 0,4 + 0,3 + 0,6 = 1,3 (попаданий).

Теорема. Математическое ожидание M (X) числа появлений события A в п независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании: M (X) = np.

Целесообразность введения числовой характеристики рассеяния случайной величины

Наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того чтобы оценить, как рассеяны возможные значения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характеристикой, которую называют дисперсией.

Прежде чем перейти к определению и свойствам дисперсии, введем понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Отклонением называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданиям.

Теорема. Математическое ожидание отклонения равно нулю: $M[X-M(X)] = 0$.

Название «центрированная величина» связано с тем, что математическое ожидание есть центр распределения

Контрольные вопросы:

1. Что такое случайная величина?
2. Приведите примеры случайных величин?
3. Чем дискретная случайная величина отличается от непрерывной?
4. Что такое закон распределения случайной величины? В каком виде его можно представить?
5. Что называется математическим ожиданием дискретной и непрерывной случайной величин?
6. Назовите свойства математического ожидания.