

## Задание

1. Ознакомиться с примерами решения типовых задач, повторить теоретический материал темы. Выполнить задания для самостоятельной работы.

4. Фотоотчет присылать на электронную почту в трехдневный срок  
С уважением, Хвастов А.Н.

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721098278 (ватсап). Электронная почта: hvastov@rambler.ru

## Практическая работа

по теме: «Вычисление площадей фигур с помощью интеграла»

**Цель работы:** закрепить навык вычисления площади криволинейной трапеции.

**Необходимо знать:** определение криволинейной трапеции, формулу Ньютона-Лейбница для расчёта определённого интеграла.

**Необходимо уметь:** по готовому чертежу составлять формулу площади и находить её значение.

### 1. Теоретическая часть

**Определение.** Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

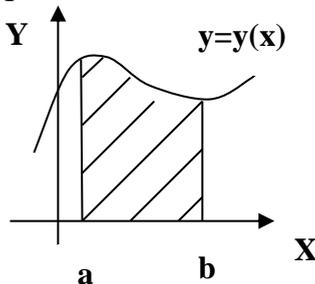


Рис.1

- сверху - графиком непрерывной функции  $y=y(x)$
- снизу – осью  $OX$  ( $y=0$ )
- слева – прямой  $x=a$
- справа – прямой  $x=b$

**Утверждение.** Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x)dx \quad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.

**Пример 1.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2x + 2, \quad x=-1, \quad x=2 \text{ и осью } OX.$$

Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

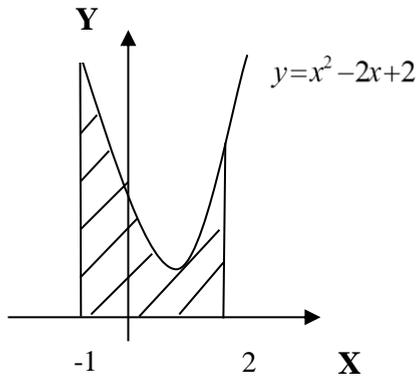


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right|_{-1}^2 = \\
 &= \left( \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) - (2^2 - (-1)^2) + (2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) = \\
 &= 3 - 3 + 6 = 6.
 \end{aligned}$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть  $y=f(x)$  – непрерывная функция при  $x \in [a, b]$ , график которой расположен ниже оси  $OX$  (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

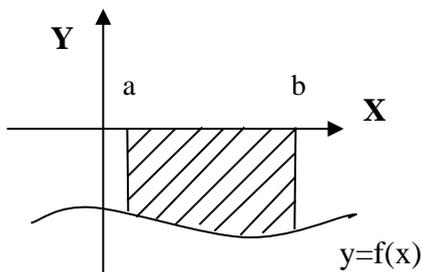


Рис. 3

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

**Пример 2.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции  $y = x^2 - 5x + 6$  и осью  $OX$ .

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси  $OX$ , поэтому применим формулу (2).

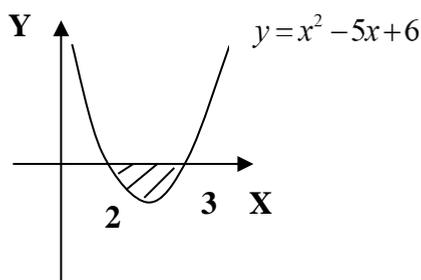


Рис. 4

$$\begin{aligned}
 S &= \left| \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx \right| = \left| \left. \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right|_2^3 \right| = \\
 &= \left| \left( \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} \right) - \left( \frac{5 \cdot 3^2}{2} - \frac{5 \cdot 2^2}{2} \right) + (6 \cdot 3 - 6 \cdot 2) \right| = \\
 &= \left| \frac{19}{3} - \frac{25}{2} + 6 \right| = \left| \frac{38 - 75 + 36}{6} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

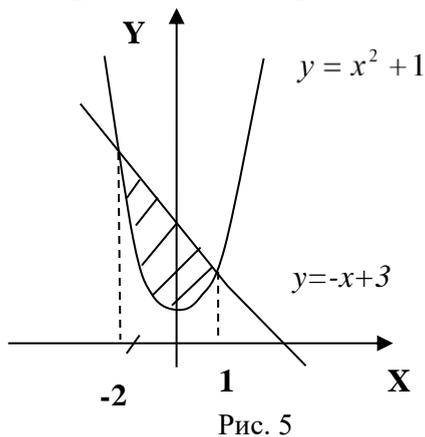
Ответ: 1/6 кв.ед.

**Пример 3.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 + 1$  и  $y = -x + 3$ .

Решение: данная фигура (рис. 5) представляет собой разность криволинейных трапеций

Абсциссы точек пересечения находим по чертежу:  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 1$ .

$S = \int_{-2}^1 (-x + 3)dx - \int_{-2}^1 (x^2 + 1)dx$ . Можно записать под один интеграл:



$$S = \int_{-2}^1 (-x + 3 - (x^2 + 1))dx = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2)dx =$$

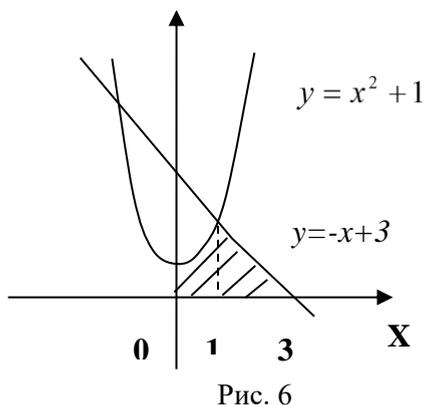
$$= 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = (2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) - \left( \frac{1^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} \right) -$$

$$- \left( \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = 6 - \left( -\frac{3}{2} \right) - 3 = 4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

**Пример 4.** Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций  $y = x^2 + 1$  и  $y = -x + 3$ , и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций  $S = S_1 + S_2$ , где  $S_1 = \int_0^1 (x^2 + 1)dx$  и  $S_2 = \int_1^3 (-x + 3)dx$ . Получим формулу:



$$S = \int_0^1 (x^2 + 1)dx + \int_1^3 (-x + 3)dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + 3x \Big|_1^3 =$$

$$= \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) + (1 - 0) - \left( \frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) + (3 \cdot 3 - 3 \cdot 1) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 - 4 + 6 = 3\frac{1}{3}$$

Ответ:  $3\frac{1}{3}$  кв.ед.

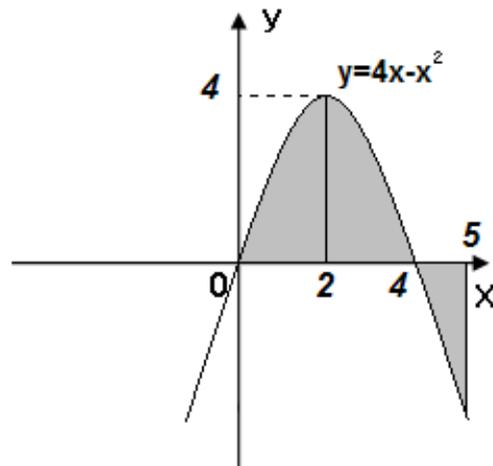
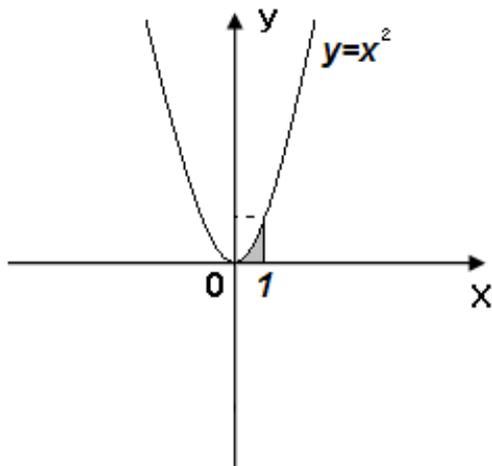
## 2. Проверьте себя

№1	№2	№3

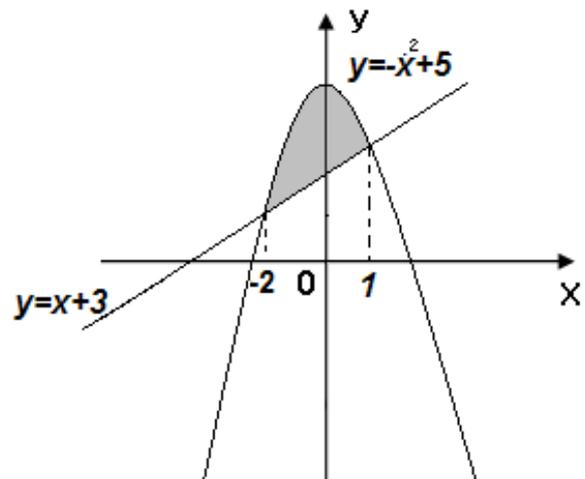
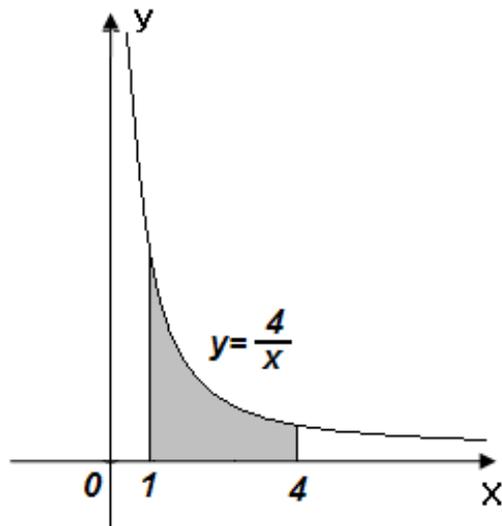
Ответы: №1  $\ln 3$  кв.ед., №2  $10\frac{2}{3}$  кв.ед., №3  $4\frac{1}{4}$  кв.ед.

### 3. Самостоятельная работа

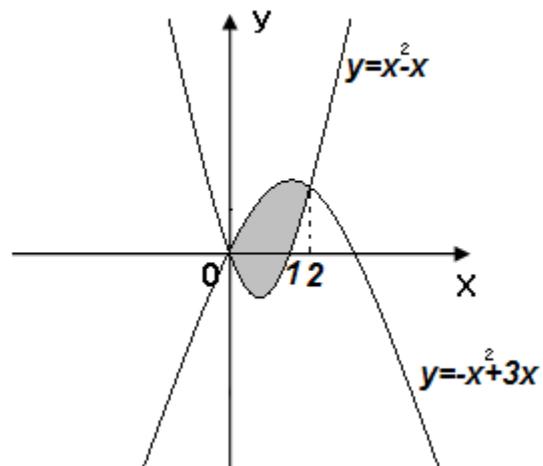
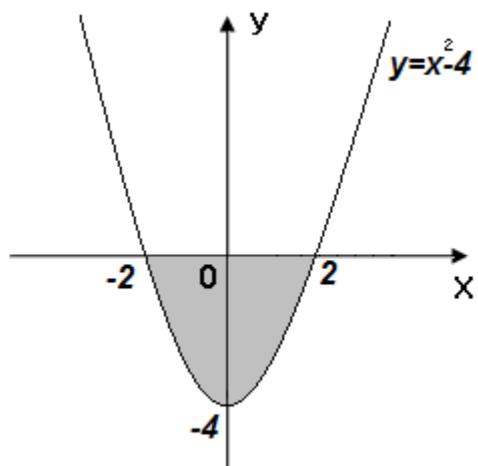
**№1 Вычислить площадь:**



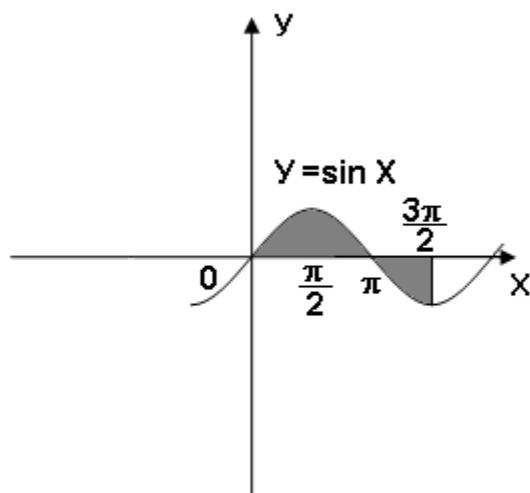
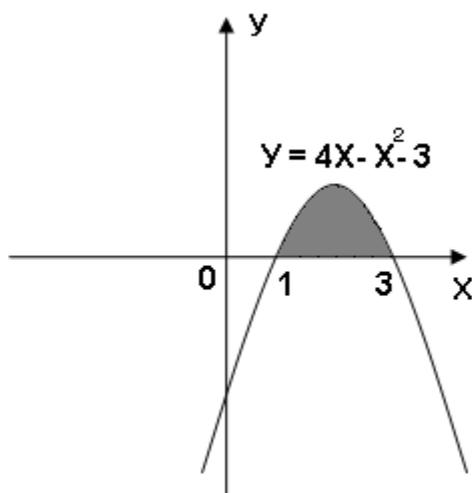
**№2 Вычислить площадь:**



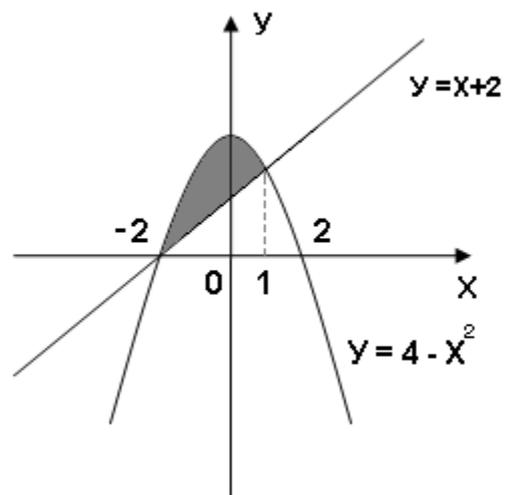
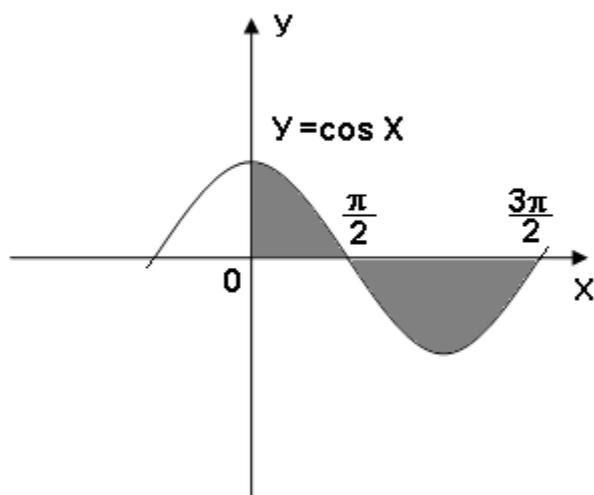
**№3 Вычислить площадь :**



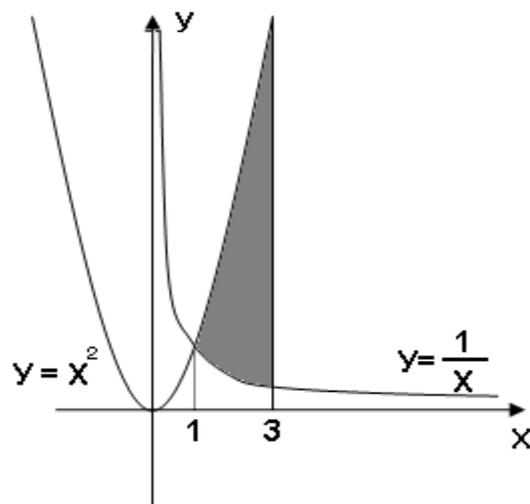
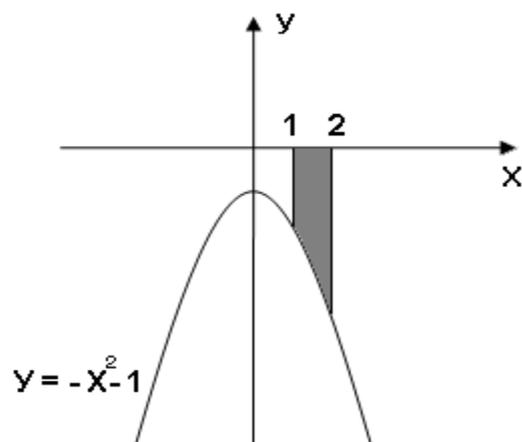
**№4 Вычислить площадь:**



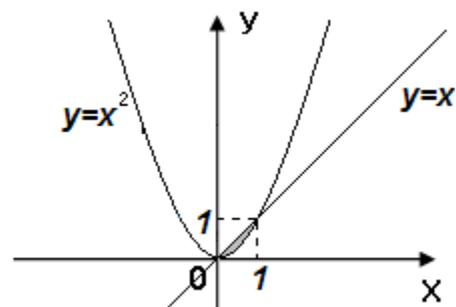
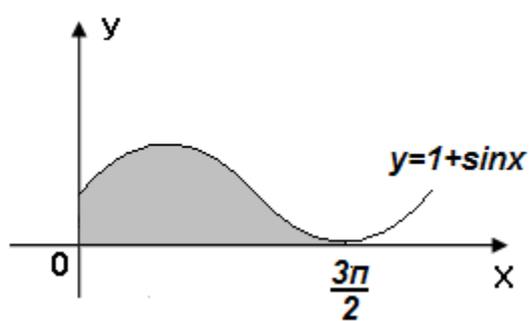
№5 Вычислить площадь:



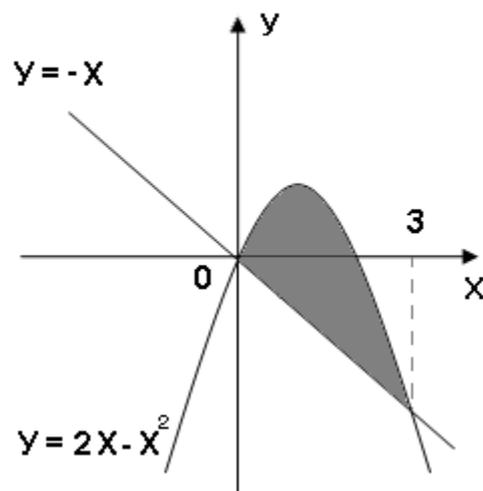
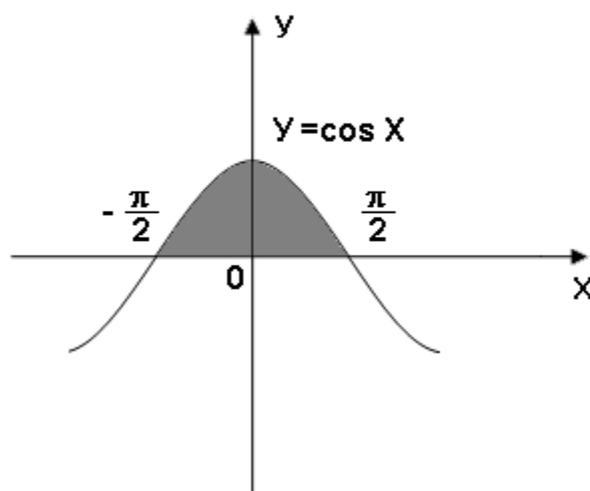
№6 Вычислить площадь:



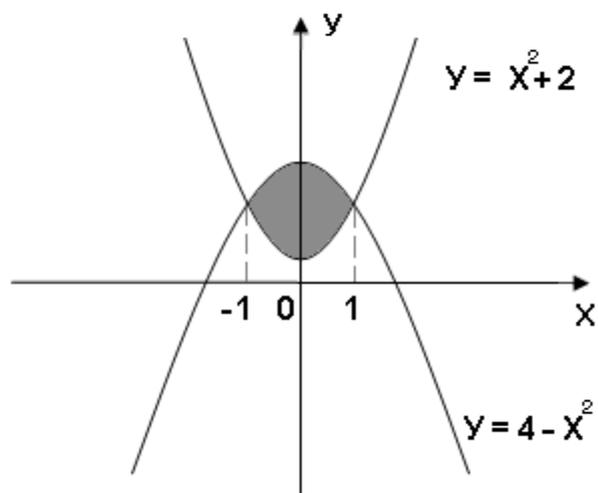
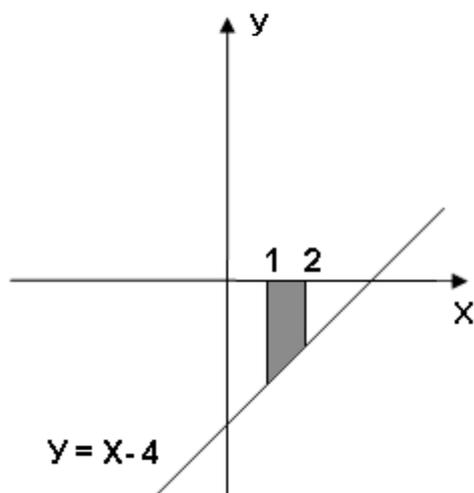
№7 Вычислить площадь:



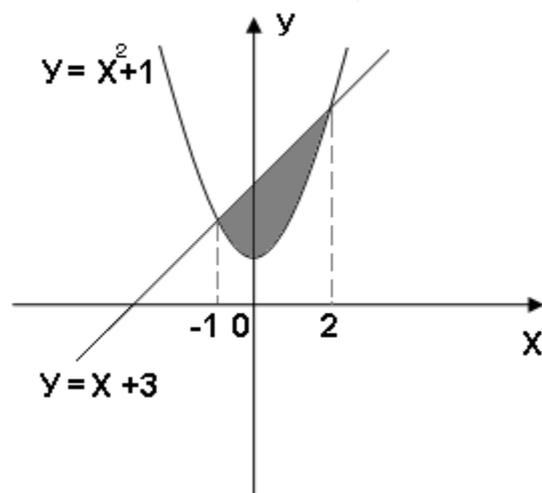
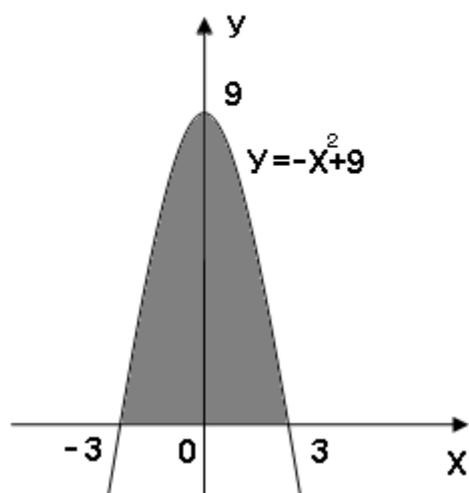
№8 Вычислить площадь:



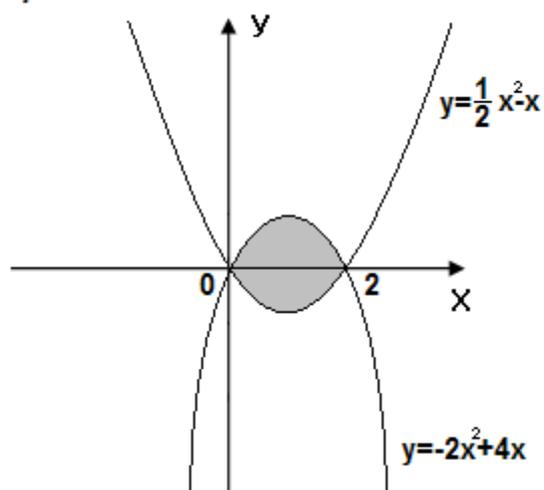
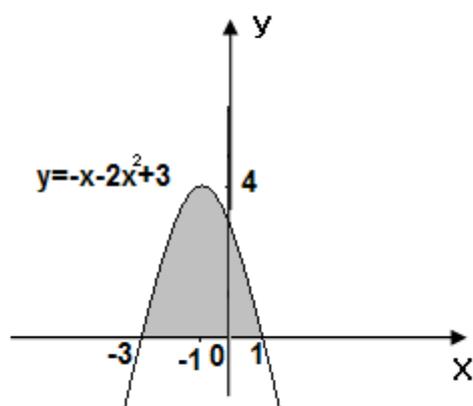
№9 Вычислить площадь:



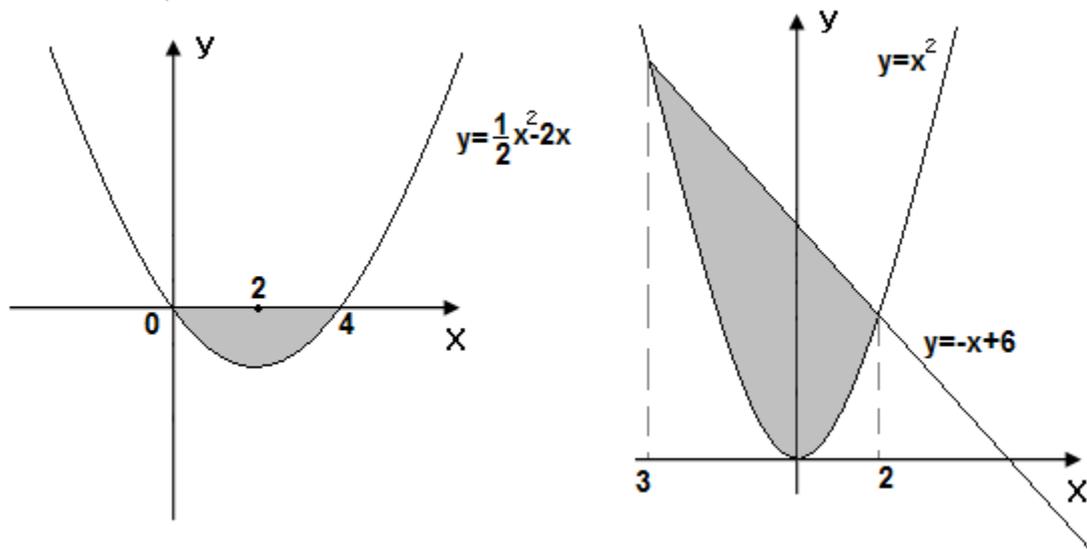
№10 Вычислить площадь:



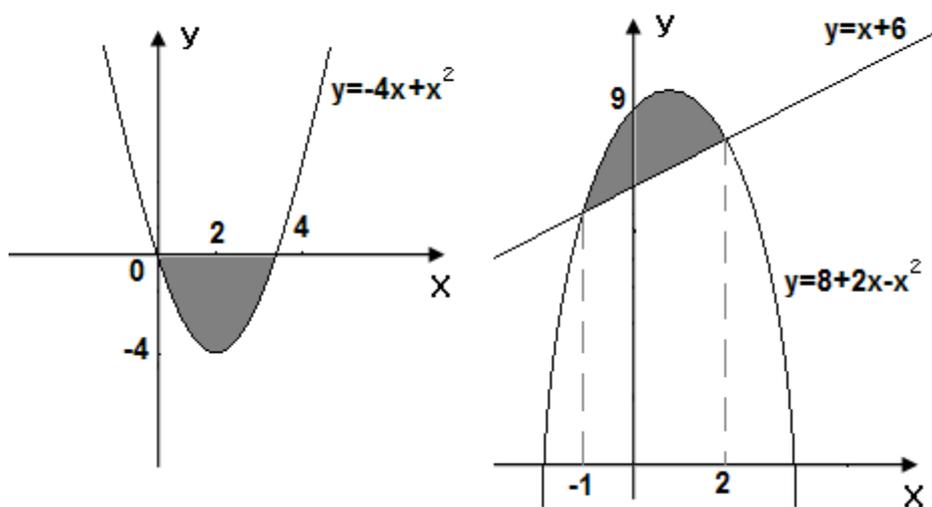
№11 Вычислить площадь:



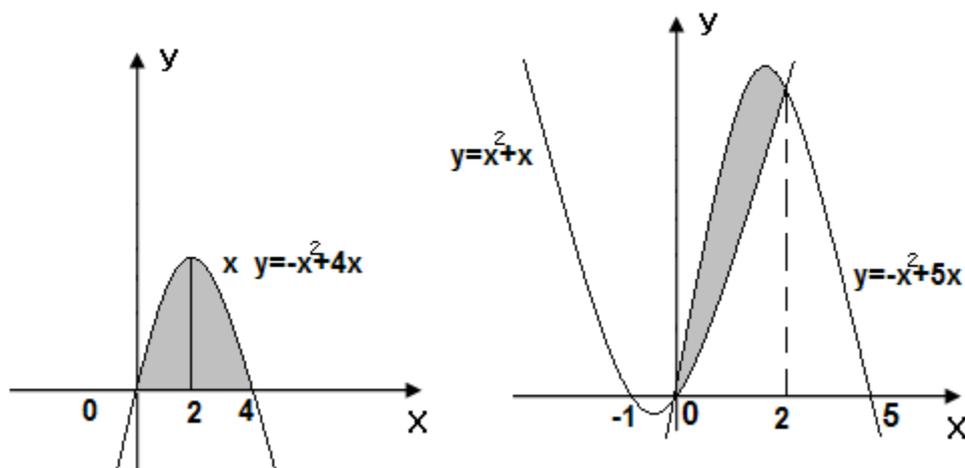
№12 Вычислить площадь:



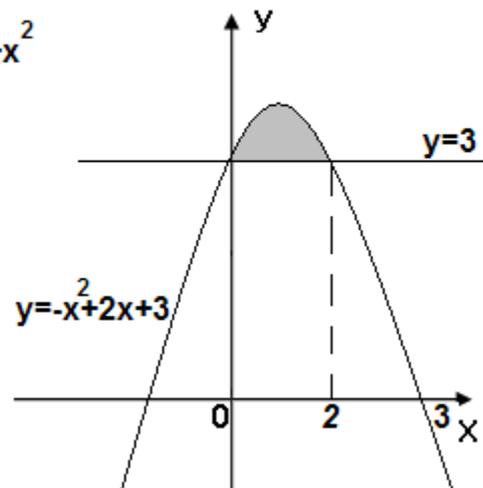
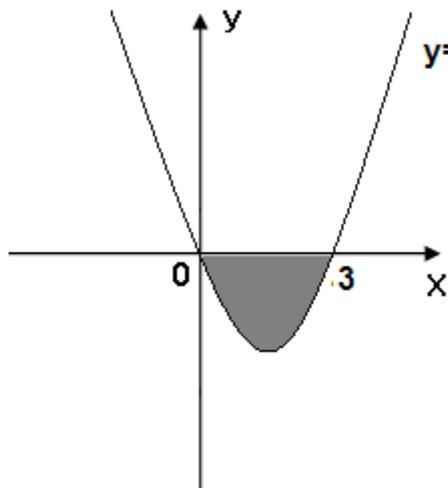
№13 Вычислить площадь:



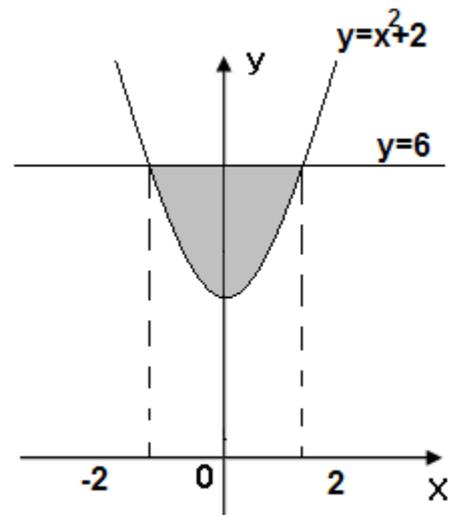
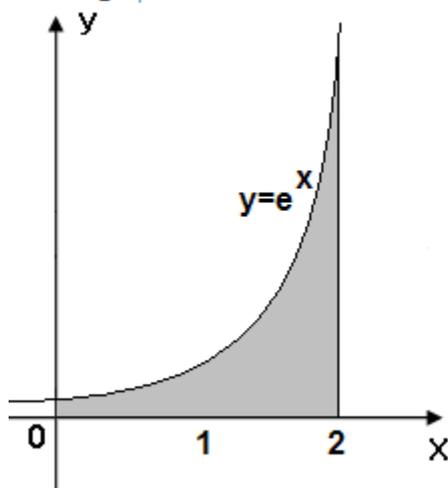
№14 Вычислить площадь:



**№15 Вычислить площадь:**

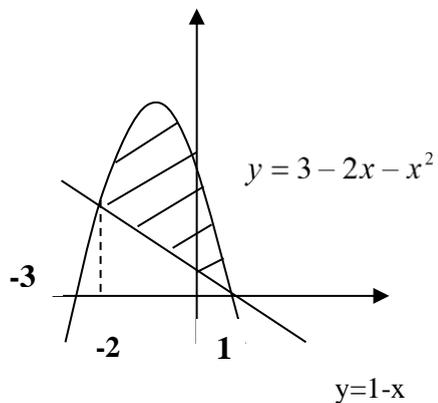


**№16 Вычислить площадь:**



#### 4. Контрольные вопросы

1. Приведите определение криволинейной трапеции.
2. В чём геометрический смысл определённого интеграла?
3. Выберите формулу площади заштрихованной фигуры:

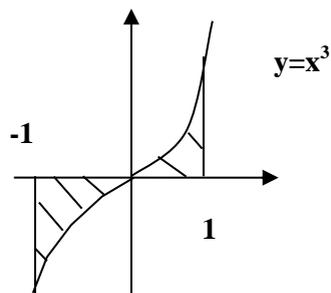


$$\text{А. } \int_{-3}^{-2} (3 - 2x - x^2) dx + \int_{-2}^1 (1 - x) dx$$

$$\text{Б. } \int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx - \int_{-2}^1 (1 - x) dx$$

$$\text{В. } \int_{-2}^1 (1 - x) dx - \int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx$$

4. Составьте формулу для вычисления площади изображённой фигуры



### Критерии оценки

«Отлично» - даны ответы на все контрольные вопросы, задания самостоятельной работы выполнено полностью.

«Хорошо» - даны ответы на все контрольные вопросы; при выполнении заданий самостоятельной работы допущены 1-2 арифметические ошибки.

«Удовлетворительно» - выполнено 60%-70% заданий самостоятельной работы, даны ответы не на все контрольные вопросы;

«Неудовлетворительно» - выполнено менее 60% заданий для самостоятельной работы