Задание:

- *Написать конспект,*
- *Ответить на вопросы в конце лекции*
- *Скриншот конспекта прислать до 19.06 на hvastov@rambler.ru*

Тема. Первообразная и интеграл. Интегральное исчисление.

Первообразная. Правила нахождения первообразных.

Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Цель занятия:

Должен уметь: вычислять определенные интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница. Вычислять площади криволинейной трапеции.

Должен знать: определение первообразной; правила нахождения первообразных. Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число, т.е. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$ здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

Свойства неопределенных интегралов

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

$$\int dF(x) = F(x) + C;$$

4. Интеграл от суммы или разности двух и более функций равен сумме или разности интегралов от этих функций

$$\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$$

Таблица интегралов

№	Интеграл	Значение	№	Интеграл	Значение
1	$\int dx$	$x+C$	11	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C =$ $= -\arccos x + C$
2	$\int x^n dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	12	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
3	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}}$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\rvert + C$
4	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int e^x dx$	$e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
6	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\lvert tg \frac{x}{2}\right\rvert + C$
7	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$	17	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
8	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$tgx + C$	18	$\int tgx dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
9	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-ctgx + C$	19	$\int ctgx dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$
10	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg} x + C =$ $= -\mathrm{arcctg} x + C$	20	$\int \frac{dx}{x(a-x)}$	$\frac{1}{a} \ln\left\lvert\frac{x}{a-x}\right\rvert + C$

Способ подстановки (замены переменных).

Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то иногда с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ можно получить:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям.

Вспомним формулу производной произведения:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

где u и v – некоторые функции от x. В дифференциальной форме:

$$d(uv) = vdu + udv$$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int vdu + \int udv$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int vdu + \int udv \qquad \text{или} \qquad \int udv = uv - \int vdu;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

При использовании метода по частям за *u* берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за *dv* – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Большую часть интегралов, вычисляемых по частям, можно разбить на три группы:

1. Интегралы вида $\int P(x) arctgx dx$, $\int P(x) arcctgx dx$, $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, где $P(x)$ – многочлен. Для их вычисления следует за u принимать одну из вышеуказанных функций, а $dv = P(x)dx$.

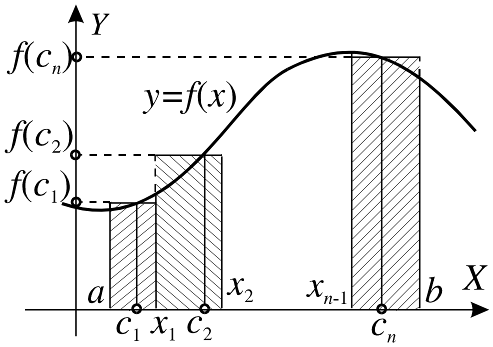
2. Интегралы вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, где $P(x)$ – многочлен, а a – некоторое число. Для их вычисления следует приять $u = P(x)$, а $dv = e^{ax}dx$, $dv = \sin axdx$, $dv = \cos axdx$.

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bxdx$, $\int e^{ax}\sin bxdx$, где a и b – некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям.

Определенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На каждом из частичных отрезков выберем произвольно по одной точке: $c_1 \in [a, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, …, $c_n \in [x_{n-1}, b]$.



Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …, $\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Геометрический смысл σ: Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, покрытого штриховкой на рисунке.

Обозначим через $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – длину наибольшего частичного отрезка. Величину λ иногда называют *параметром разбиения*.

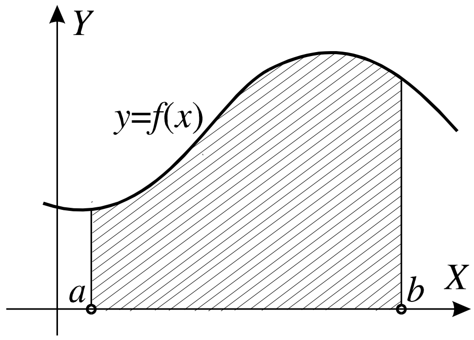
Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю.

Если существует предел интегральной суммы $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

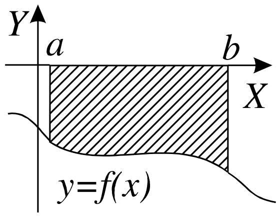
В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$. Число a называется *нижним пределом интегрирования*, а число b – *верхним пределом интегрирования*.

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i. Из определения определенного интеграла следует, что его величина зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл определяется однозначно и представляет собой некоторое число.



***Геометрический смысл** определенного интеграла*: Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

Если $f(x) < 0$ на отрезке $[a,b]$, то $S = -\int_a^b f(x)dx$.



Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$;
3. Если $c \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
5. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, где k – произвольное число.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $F(x)$ является ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

то есть определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Замена переменных в определенном интеграле

Пусть задан интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную в соответствии с формулой $x=\varphi(t)$. Тогда если:

1) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$;

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha,\beta]$,

то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Эта формула называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Замечание. Если при вычислении неопределенного интеграла с помощью замены переменной следует от новой переменной *t* возвращаться к старой переменной *x*, то при вычислении определенного интеграла этого делать ненужно, т.к. $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt=F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a)$

Интегрирование по частям.

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула:

$$\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu.$$

которая называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Также при вычислении определенного интеграла используются следующие правила:

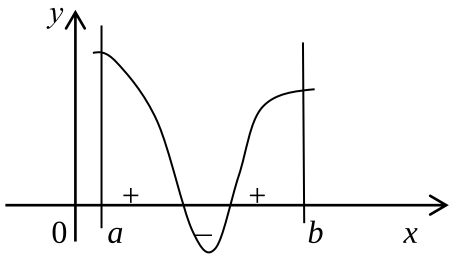
Если $f(x)$ – нечетная, то $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=0$, если нечетная, $\int\limits_{-a}^a f(x)dx=2\int\limits_0^a f(x)dx$

Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры.

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a,b]$, вычисляется по формуле $S=\int\limits_a^b f(x)dx$

Если график расположен ниже оси *Ox*, т.е. $f(x)<0$, то площадь имеет знак “–“, если график расположен выше оси *Ox*, т.е. $f(x)>0$, то площадь имеет знак “+”.



Таким образом, для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

б) Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

в) Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$, выражается формулой $S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$.

Контрольные вопросы

1. Первообразная.
2. Правила нахождения первообразных.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Свойства неопределенного интеграла.
5. Методы интегрирования.
6. Вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.