Уважаемые студенты!

1. Изучить и законспектировать материал лекции. Конспект записывать по составленным самостоятельно к лекции контрольным вопросам. Контрольных вопросов должно быть не менее 5.

2. Фотоотчет присылать на электронную почту

3. С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

ЛЕКЦИЯ Кванторы. Истинные формулы и эквивалентные соотношения.

План

1. Кванторы.
2. Истинные формулы и эквивалентные соотношения.
3. Доказательства в логике предикатов.

1. Кванторы.

Пусть $P(x)$ – предикат, определённый на множестве M. Высказывание “для всех $x \in M$ $P(x)$ истинно” обозначается $\forall x \in M\, P(x)$ или $\forall x \in M \mid P(x)$. Здесь множество M входит в обозначение, но когда оно ясно из контекста пишут просто $\forall x\, P(x)$. Знак $\forall$ называется квантором общности.

Высказывание “существует такое значение $x \in M$, что $P(x)$ истинно” обозначается $\exists x \in M \mid P(x)$ или $\exists x\, P(x)$. Знак $\exists$ называется *квантором существования*. Переход от предиката $P(x)$ к выражениям вида $\forall x\, P(x)$ или $\exists x\, P(x)$ называется *связыванием* переменной x, а также *навешиванием квантора* на переменную x (или на предикат $P(x)$). Переменная, на которую навешен квантор, называется *связанной*, несвязанная переменная называется *свободной*.

Смысл связанных и свободных переменных в предикатах принципиально различен. Свободная переменная – это обычная переменная, которая может принимать различные значения из множества M; выражение $P(x)$ - переменное высказывание, зависящее от значения x. Выражение $\forall x P(x)$ не зависит от переменной x и имеет вполне определённое значение. Это, в частности, означает, что переименование связанной переменной, то есть переход от выражения $\exists x\, P(x)$ к выражению $\forall x P(x)$ и наоборот не меняет истинности выражения. Переменные, являющиеся, по существу, связанными, встречаются не только в логике. Например, в выражениях $\sum_{x=1}^{10} f(x)$ или $\int_a^b f(x)dx$ переменная x связана: при фиксированной функции f первое выражение равно определенному числу, а второе становится функцией от пределов интегрирования.

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты и вообще на любые логические выражения, которые при этом заключаются в скобки. Выражение, на которое навешивается квантор $\forall$ или $\exists$ называется областью действия квантора. Все вхождения переменной в это выражение являются связанными. Навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нём количество свободных переменных и превращает его в предикат от меньшего числа переменных.

<u>Пример 2.</u>

а) Пусть $P(x)$ – предикат “x – чётное число”. Тогда высказывание $\forall x P(x)$ истинно на любом множестве чётных чисел и ложно, если множество M содержит хотя бы одно нечётное число. Высказывание $\exists x P(x)$ истинно на любом множестве, содержащем хотя бы одно чётное число и ложно на любом множестве нечётных чисел.

б) Рассмотрим двухместный предикат $x \geq y$ на множествах M с отношением нестрогого порядка. Предикат $\forall x (x \geq y)$ есть одноместный предикат от переменной y. Если M – множество неотрицательных чисел, то этот предикат истинен в единственной точке $y = 0$. Предикат $\forall x \forall y (x \geq y)$ (можно записать $\forall x, y$) высказывание истинное на множестве, состоящем из одного элемента и ложное на всяком другом множестве. Высказывание $\exists x \forall y (x \geq y)$ утверждает, что в множестве M имеется максимальный элемент (для любого y существует такой x, что $x \geq y$). Оно истинно на любом конечном множестве целых чисел. Высказывание $\forall y \exists x (x \geq y)$ утверждает, что для любого элемента y имеется элемент x, не меньший его. Оно истинно на любом непустом множестве ввиду рефлексивности отношения $\geq$. Последние два высказывания говорят о том, что перестановка кванторов меняет смысл высказывания и условие его истинности.

2. Истинные формулы и эквивалентные соотношения.

При логической (истинностной) интерпретации формул логики возможны три основные ситуации.

1. Если в области M для формулы F существует такая подстановка констант вместо всех переменных, что F становится истинным высказыванием, то эта формула называется *выполнимой в области* M. Если существует область M, в которой формула F выполнима, то формула называется просто выполнимой. Пример выполнимой формулы - $\exists x P(x, y) \to \forall x P(x, y)$.
2. Если формула F выполнима в области M при любых подстановках констант, то она называется *тождественно истинной в области* M. Формула, тождественно истинная в любых множествах называется просто *тождественно истинной*, или *общезначимой,* или *тавтологией*. Например, формула $\exists x P(x, y) \to \forall x P(x, y)$ тождественна для всех множеств, состоящих из одного элемента, а формула $\forall x (P(x) \vee \overline{P}(x))$ является тавтологией.

3. Если формула F невыполнима в области M при любых подстановках констант, то она называется *тождественно ложной в области* M. Формула, тождественно ложная в любых множествах называется просто *тождественно ложной* или *противоречивой*. Формула $\forall x(P(x) \vee \overline{P}(x))$ является противоречивой.

Определение. Формулы называются *эквивалентными*, если при любых подстановках одинаковых констант они принимают одинаковые значения. В частности, все тождественно истинные (и все тождественно ложные) формулы являются эквивалентными.

Отметим, что если формулы F_1 и F_2 эквивалентны в соответствии с этим определением, то формула $F_1 \leftrightarrow F_2$ является тождественно истинной.

Замечание. Исследование формул логики предикатов имеет огромное значение потому, что эти формулы входят практически в любую формальную теорию. В связи с этим возникают две проблемы: получение истинных формул и проверка имеющихся формул на истинность. Поскольку предикатные переменные имеют, в общем случае, бесконечное множество значений, то установить истинность формул простым перебором значений на всех наборах переменных, как это иногда делалось для логических функций, просто невозможно. В связи с этим, приходится использовать различные косвенные приёмы.

Пример 3. Рассмотрим соотношение $\overline{\exists x P(x)} \sim \forall x \overline{P(x)}$. Пусть для некоторого предиката P и области M левая часть истинна. Тогда не существует такого $x_0 \in M$, для которого $P(x_0)$ истинно. Следовательно, для любых значений x $P(x)$ ложно, то есть $\overline{P(x)}$ и правая часть истинна. Если же левая часть ложна, то всегда существует $x_0 \in M$, для которого $P(x_0)$ истинно и, следовательно, правая часть ложна.

Аналогично доказывается истинность соотношения $\overline{\forall x P(x)} \sim \exists x \overline{P(x)}$

Большое значение имеют следующие свойства, которые могут быть доказаны способом, рассмотренным в примере 3.

1) Дистрибутивность квантора $\forall$ относительно конъюнкции:

$$\forall x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \sim \forall x P_1(x) \wedge \forall x P_2(x).$$

2) Дистрибутивность квантора $\exists$ относительно дизъюнкции:

$$\exists x(P_1(x) \vee P_2(x)) \sim \exists x P_1(x) \vee \exists x P_2(x).$$

Если же кванторы $\forall$ и $\exists$ поменять местами, то получатся соотношения, верные только в одну сторону:

3) $\exists x(P_1(x) \wedge P_2(x)) \rightarrow \exists x P_1(x) \wedge \exists x P_2(x)$,

4) $\forall x(P_1(x) \vee P_2(x)) \rightarrow \forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)$.

В таких случаях говорят, что левая часть является более сильным утверждением, чем правая, поскольку она требует для своего выполнения более жёстких условий. Так, например, в соотношении 3 в левой части требуется, чтобы оба предиката были истинны для одного и того же значения x, тогда как в правой части они могут быть истинны при различных значениях переменной. Пример случая, когда соотношения 3 и 4 в обратную сторону неверны: $P_1(x)$ – “x – чётное число”, $P_2(x)$ – “x – нечётное число”.

Пусть Y – некоторое переменное выражение, не содержащее переменной x. Тогда выполняются соотношения:

5) $\forall x(P(x) \wedge Y) \sim \forall x P(x) \wedge Y$.

6) $\forall x(P(x) \vee Y) \sim \forall x P(x) \vee Y$.

7) $\exists x(P(x) \wedge Y) \sim \exists x P(x) \wedge Y$.

8) $\exists x(P(x) \vee Y) \sim \exists x P(x) \vee Y$.

Эти соотношения означают, что формулу, не содержащую переменной x, можно выносить за область действия квантора, связывающего эту переменную.

3. Доказательства в логике предикатов.

Метод доказательства формул, содержащих переменные, путём непосредственной подстановки в них констант называется методом интерпретаций или методом моделей. Подстановка констант позволяет интерпретировать формулу как осмысленное утверждение об элементах конкретного множества. Поэтому такой метод, выясняющий истинность формулы путём обращения к её возможному смыслу называется семантическим (смысловым). Метод интерпретаций удобен для доказательства выполнимости формул или их неэквивалентности, поскольку и в том, и в другом случае достаточно найти одну подходящую подстановку. Он удобен также для исследования истинности формул на конечных областях. Дело в том, что если область $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ конечна, то кванторы переходят в конечные формулы логики высказываний:

$\forall x P(x) \sim P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$, $\exists x P(x) \sim P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_n)$.

Заменяя все кванторы по этим соотношениям, любую формулу логики предикатов можно перевести в формулу, состоящую из предикатов, соединённых логическими операциями. Истинность такой формулы на конечной области проверятся конечным числом подстановок и вычислений. Методы рассуждений, использующие только конечные множества конечных объектов, называются *финитными*.

Для бесконечных же областей, в общем случае, при доказательстве тождественной истинности формул метод интерпретации связан с большими трудностями. Поэтому для построения множества истинных формул в логике предикатов выбирается иной путь. Это множество порождается из неких исходных формул (аксиом) с помощью формальных процедур - правил вывода. Используются лишь формальные (а не содержательные), внешние свойства последовательности символов, образующих формулы, причём эти свойства полностью описываются правилами вывода. Множества, порождённые таким формальным методом, называются формальными.