Задание

1. Повторить теоретический материал темы. Выполнить задания для самостоятельной работы, ответить на контрольные вопросы.

4. Фотоотчет присылать на электронную почту в трехдневный срок

С уважением, Хвастова Светлана Ивановна

!!! Если возникнут вопросы обращаться по телефону 0721389311 (ватсап). Электронная почта: xvsviv@rambler.ru

Практическая работа

«Перевод высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов»

Цель работы: **приобретение навыков перевода высказываний естественного языка на язык исчисления предикатов**

Образовательные результаты:

Студент должен

уметь:

- формулировать задачи логического характера и применять средства математической логики для их решения.

знать:

- основные принципы математической логики, теории множеств и теории алгоритмов;

-основы языка и алгебры предикатов.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Основные понятия и определения алгебры логики предикатов

***N*-местным предикатом**, определённым на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$, называется предложение, содержащее n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2,\ldots,M_n$ соответственно.

Обозначать n-местные предикаты будем $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, причём переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ называются **предметными**.

Всякий n-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определённый на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ есть функция от n аргументов, заданная на указанных множествах и принимающая значение 0 (ложно) или 1(истинно).

N-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ задан на множестве M, если $x_1,x_2,\ldots,x_n$ принимают значения из M.

Примерами предикатов являются любые уравнения и неравенства из школьного курса математики.

Пример 1. $x+y>2$, где x,у из R есть двухместный предикат заданный на множестве всех действительных чисел R.

Предикат $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется:

– **тождественно истинным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ любых конкретных значений из множеств $M_1, M_2,\ldots,M_n$ он превращается в истинное высказывание;

– **тождественно ложным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ любых конкретных значений из множеств $M_1, M_2,\ldots,M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

– **выполнимым**, если существует по крайней мере один набор значений переменных из $M_1, M_2,\ldots,M_n$, при которых его значение истинно.

Обозначают: тождественно истинный – $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 1$; тождественно ложный – $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 0$.

Двухместный предикат $x^2+y^2 \geq 0$, заданный на множестве R является тождественно истинным.

Одноместный предикат $\sin x > 1$, заданный на множестве R является тождественно ложным.

Примером выполнимого предиката заданного на множестве R является предикат $x+y > z$.

Множеством истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ заданного на множествах $M_1,\ M_2,\dots,M_n$ называется совокупность всех упорядоченных наборов $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, где $a_i \in M_i$, $i=1,2,\dots,n$ при которых $A(a_1,a_2,\dots,a_n) =1$.

Множество истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ будем обозначать N_A.

Пример 1. Пусть $A(x)=(x^2+3x - 4=0)$ – одноместный предикат, заданный на множестве R. Ясно, что $N_A=\{1,-4\}$. Однако, если данный предикат задан на множестве натуральных чисел, то его множество истинности $N'_A=\{1\}$.

Пример 2. Пусть $x^2+y^2=4$ – двухместный предикат, заданный на множестве действительных чисел R. Тогда множеством истинности его являются множества всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, лежащих на окружности с центром в начале координат и радиусом 2.

Непосредственно из определения 2 следует справедливость следующего утверждения.

Пусть $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ n-местный предикат, заданный на множествах M_1, $M_2,\dots,M_n$ тогда справедливы следующие утверждения :

– A (x1,x2,…,xn) является тождественно истинным тогда и только тогда, когда NA= M1× M2×…×Mn;

– A (x1,x2,…,xn) является тождественно ложным тогда и только тогда, когда NA=Ø;

– A (x1,x2,…,xn) является выполнимым тогда и только тогда, когда NA≠Ø.

Два n-местных предиката $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ заданных на одних и тех же множествах $M_1,\ M_2,\dots,M_n$ называются **равносильными**, если для любых наборов переменных $(a_1,a_2,\dots,a_n)$, где $a_i \in M_i$, $i=1,2,\dots,n$ они принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из данного определения следует, что предикаты $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\dots,x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают, то есть $N_A=N_B$.

Тот факт, что предикаты $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равносильны будем обозначать так: $A=B$.

Предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённый на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется **следствием** предиката $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённом над теми же множествами, если он принимает истинные значения на всех тех наборах значений переменных, на которых истинно значение предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Другими словами можно сказать, что предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является следствием предиката $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ тогда и только тогда, когда $N_B \subseteq N_A$.

Пример 3. Пусть $A_1(x)=x\vdots 2$ (x делится на 2), $A_2(x)= x\vdots 4$ (x делится на 4) два одноместных предиката заданных на множестве натуральных чисел. Ясно, что предикат A_1 является следствием предиката A_2.

Так как любой предикат при фиксированных значениях переменных превращается в высказывание, то над ними можно проделывать те же логические операции, что и над высказываниями.

Отрицанием n-местного предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определённого на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $\overline{A(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$, значение которого истинно при всех тех значениях переменных, при которых значение предиката ложно.

Пример 4. Отрицанием двухместного предиката $x+y > 2$, определённого на множестве R является предикат $x+y < 2$, определённый на том же множестве R.

Теорема 1 *Пусть* $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ – n-местный предикат, определённый на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$. Тогда справедливо следующее тождество: $N_{\bar{A}} = (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n) \setminus N_A$.

Непосредственно из данной теоремы следует:

Следствие. Отрицание предиката будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

Конъюнкцией n-местных предикатов $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определённых на множествах $M_1,M_2,\ldots,M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение исходных предикатов.

Теорема 2 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n-местных предиката определённые на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Тогда справедливо следующее тождество: $N_{A \cdot B} = N_A \bigcap N_B$.

Непосредственно из данной теоремы следует:

Следствие. Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

Теорема 2 используется в школьном курсе математики при решении систем уравнений и неравенств. Например, требуется решить систему неравенств $|x| < 5$, $x \geq 3$. Для этого нужно найти множество истинности предиката $(|x| < 5) \cdot (x \geq 3)$, определённого на множестве R. Используя теорему 2, получаем:

$$N_{(|X|<5)\cdot(X\geq 3)} = N_{|X|<5} \bigcap N_{X \geq 3} = [-5{,}5] \bigcap [3, +\infty) = [3{,}5].$$

Дизъюнкцией n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$ называется n-местный предикат, определенный на этих множествах, обозначенный $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение по меньшей мере одного из исходных предикатов.

Теорема 3 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ два n-местных предиката, определенные на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Тогда справедливо следующее тождество $N_{A \vee B} = N_A \cup N_B$.

Следствие. Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.

Теорема 4 Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n-местные предикаты, определенные на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$, тогда справедливы следующие равносильности:

$A \cdot B = B \cdot A$, $A V B = B V A$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A V (B V C) = (A V B) V C$, $A \cdot (B V C) = A \cdot B V A \cdot C$, $A V B \cdot C = (A V B) \cdot (A V C)$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} V \overline{B}$, $\overline{A V B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-местные предикаты на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Их импликацией называется предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого ложно только при тех наборах переменных, при которых значение предиката A истинно, а B – ложно. Предикат A называется посылкой и B – заключением.

Непосредственно из определения следует, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки.

Эквивалентность двух n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется n-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого истинно при всех тех наборах переменных, при которых предикаты A и B принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из определения 10 следует, что эквивалентность двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда они равносильны.

В следующей теореме доказаны важные равносильности, выражающие одни логические операции над предикатами через другие.

Теорема 5 Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-местные предикаты, определенные на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Тогда справедливы следующие равносильности:

$A \Rightarrow B = \overline{A} V B$, $A \cdot B = \overline{\overline{A} V \overline{B}}$, $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \cdot (B \Rightarrow A)$.

Задания для практического занятия:

Таблица вариантов

№ по списку	Вариант задания	№ по списку	Вариант задания
1	1	11	1
2	2	12	2
3	3	13	3
4	4	14	4
5	5	15	5
6	1	16	1
7	2	17	2
8	3	18	3
9	4	19	4
10	5	20	5

Вариант 1

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– если произведение конечного числа сомножителей равно нулю, то, по меньшей мере, один из сомножителей равен нулю. ($P(x)$ – “x есть произведение конечного числа сомножителей», $F(x, y)$ – «x есть один из сомножителей числа y”);

– существует х, меньшее, чем 5 и, большее, чем 3;

– каждый студент выполнил, по крайней мере, одну лабораторную работу;

– животные, живущие в зоопарке, встречаются с людьми, посещающими зоопарк;

– судья Иванов не стар и не бодр;

– некоторые женщины одновременно являются юристами и членами конгресса;

– ни один судья не является преподавателем;

– некоторые преподаватели не восхищаются ни одним юристом;

– все студенты группы свободно владеют всеми тремя языками: английским, немецким, французским;

– каждое рациональное число есть действительное число. Некоторое действительное число есть рациональное число. Не каждое действительное число есть рациональное число.

2. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;

$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;

$t^{'} < t$ - “ момент времени $t^{'}$ предшествует моменту t”.

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:

– я всегда что-то вижу;

– не существует предметов, которые я никогда не беру;

– я всегда вижу либо все, либо ничего.

Вариант 2

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– наибольший общий делитель чисел a и b делится на всякий их общий делитель ($F(x,y)$ – “x есть один из делителей числа y”, а $G(x,y,z)$ – “z есть наибольший общий делитель чисел x и y”);

– для любого числа x существует число y, меньшее x;

– если произведение натуральных чисел делится на простое число, то на него делится, по крайней мере, один из сомножителей;

– никакой продавец игрушками сам себе их не покупает;

– не все юристы судьи;

– некоторые пациенты любят докторов;

– некоторые женщины-юристы являются домашними хозяйками;

– судья Иванов не восхищается ни одним преподавателем;

– каждый студент группы владеет каждым иностранным языком (английским, немецким, французским);

– любые два действительных числа либо равны, либо одно из них меньше другого.

2. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;

$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;

$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:

– иногда я ничего не вижу;

– я никогда не беру того, что я всегда вижу;

– если я беру некоторый предмет, который до этого уже видел, то я ранее видел предмет, который взял позднее.

Вариант 3

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– для всякого действительного числа x существует большее действительное число y;

– для любых чисел x и y суммы $x+y$ и $y+x$ равны;

– через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость;

– те римляне, которые ненавидели диктатора, пытались убить его;

– некоторые юристы, являющиеся политиками, – члены конгресса;

– ни один доктор не является знахарем;

– все женщины-юристы восхищаются каким-нибудь судьей;

– существуют как юристы, так и преподаватели, которые восхищаются судьей Ивановым;

– есть студенты, которые свободно владеют и английским и немецким и французским языками;

– каждый ребенок человека x состоит в браке с ребенком человека y.

2. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;

$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;

$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:

– существуют предметы, которые я никогда не вижу;

– всегда существуют вещи, которые я не вижу и не беру;

– некоторые вещи, которые я видел ранее, я всегда вижу вновь спустя определенное время.

Вариант 4

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– существуют такие действительные числа x, y, z что сумма чисел x и y

больше, чем произведение чисел x и z;

– для любого числа x существует такое число y, что для любого z, если разность

$z-5$ меньше, чем y, то разность $x-7$ меньше 3;

– всякое животное, встречающееся с вежливыми людьми, счастливо;

– римляне либо были преданы диктатору, либо ненавидели его;

– ни один член конгресса не бодр;

– выгул кошек или собак запрещен;

– некоторые юристы восхищаются только судьями;

– только судьи восхищаются судьями;

– в группе есть студенты, которые свободно владеют английским языком, есть те, которые свободно владеют французским, а также те, которые знают немецкий язык;

– у человека y существует ребенок, который не состоит в браке с ребенком человека x.

2. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;

$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;

$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:

– я вижу каждую вещь в некоторый момент времени;

– я беру всякую вещь, которую я никогда не вижу;

– если я когда-либо видел две вещи одновременно, то в будущем я также увижу их только одновременно.

Вариант 5

1. Перевести выражения естественного языка на язык исчисления предикатов:

– для каждого действительного числа x существует такое y, что для каждого z, если сумма z и 1 меньше y, то сумма x и 2 меньше 4;

– между любыми двумя различными точками на прямой лежит, по крайней мере, одна точка, с ними не совпадающая;

– все люди, посещающие зоопарк, вежливы;

– некоторые судьи - старики, но бодрые;

– все старые члены конгресса - юристы;

– ни одна женщина не является одновременно политиком и домашней хозяйкой;

– некоторые юристы восхищаются женщинами;

– все судьи восхищаются только судьями;

– нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиной еще большая;

– существуют два человека такие, что каждый ребенок одного из них состоит в браке с ребенком другого.

2. Введем следующие обозначения:

$Z(x,t)$ - “я вижу предмет x в момент времени t”;

$P(x,t)$ - “я беру предмет x в момент времени t”;

$t' < t$ - “ момент времени t' предшествует моменту t”.

Перевести следующие выражения на язык исчисления предикатов:

– если я беру предмет, не видя его до этого, то через некоторое время я вижу его, но не беру;

– я беру всякий предмет, который я еще не взял до этого;

– если я когда-либо видел и взял предмет одновременно, то впоследствии я либо делаю то и другое, либо не делаю ни того, ни другого.

Контрольные вопросы:

1. Когда конъюнкция двух предикатов тождественно истинна?

2. Когда предикат *A* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется выполнимым?

3. Когда предикат *A* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданный на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется тождественно истинным?