Уважаемые студенты!
Вам необходимо изучить материал лекции, законспектировать материал лекции и ответить на контрольные вопросы.

- **Фотоотчет конспекта лекции и выполненного домашнего задания предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru,**
- **При возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278**

Применение определенного интеграла

План.

1. Применение интеграла в физике.
2. Применение интеграла в математике.

Определённый интеграл имеет многочисленные приложения в математике, механике, физике, астрономии, технике и других областях человеческой деятельности. Мы рассмотрим здесь только применение в физике и математике.

Таблица 1.1 Применение интеграла

Математика	***Физика***
1. Вычисления S фигур. 2. Длина дуги кривой. 3. V тела на S параллельных сечений. 4. V тела вращения и т.д.	1. Работа *A* переменной силы. 2. S – (путь) перемещения. 3. Вычисление массы. 4. Вычисление момента инерции линии, круга, цилиндра. 5. Вычисление координаты центра тяжести. 6. Количество теплоты и т.д.

1. Вычисление пути, пройденного точкой

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t) \geq 0$ за промежуток времени от t_1 до t_2 вычисляется по формуле $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Примеры:

1. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4–ю секунду.

Решение: согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t,\quad t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно, $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (*м*).

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе – со скоростью v = (4t+5) м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение: очевидно, что искомая величина есть разность расстояний, пройденных первым и вторым телом за 5 с:

$$s_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = [2t^2 + t^2]_0^5 = 275\ (м), s_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = [2t^2 + 5t]_0^5 = 75\ (м),$$
$$s_1 - s_2 = 275 - 75 = 200\ (м).$$

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью и = (39,2–9,8^) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение: тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда v = 0, т.е. 39,2–9,8t = 0, откуда I = 4 с. По формуле на ходим

$$s = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)dt = [39{,},2t - 4{,}9t^2]_0^4 = 78{,}4\ (м).$$

2. Вычисление работы силы

Работа, произведенная переменной силой f(x) при перемещении по оси *Ox* материальной точки от x = *a* до *x=b,* находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Г у к а:*F=kx, (3)* где F – сила Н; *x*–абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой *F*, а *k* –коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример:

1. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

Решение: используя равенство (3), имеем 50=0,01k, т. е. kК = 5000 Н/м. Находим пределы интегрирования: а = 0,22 – 0,2 = 0,02 (м), b=0,32– 0,2 = 0,12(м). Теперь по формуле (2) получим $A = \int_{0,02}^{0,12} 5000dx = 5000\frac{x^2}{2}\Big|_{0,02}^{0,12} = 2500(0,0144 - 0,0004) = 2500 * 0,014 = 35$ (Дж).

3. Вычисление работы, производимой при поднятии груза

Задача. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

Решение: выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx. Работа А, которую надо произвести, чтобы поднять слой воды весом Р на высоту x, равна Px.

Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $dV = пr^2\, dx$ и изменение веса Р на величину * $dP = 9807\, r^2\, dx$; при этом совершаемая работа А изменится на величину $dA=9807пr^2\, xdx$. Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до Н, получим $A = \int_0^H 9807\pi r^2 x dx = 4903\pi r^2 H^2 = 4903\pi * 0,25 * 2^2 = 4903\pi$ (Дж)

4. Вычисление силы давления жидкости

Значение силы Р давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения x этой площадки, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле Р =9807 δ S x, где δ – плотность жидкости, кг/м^3; S – площадь площадки, м^2; x – глубина погружения площадки, м.

5. Длина дуги

Пусть плоская кривая AB задана уравнением y =f(x) (a $\leq$ x $\leq$ b), причем f(x) – непрерывные функции в промежутке [a,b]. Тогда дифференциал dl длины дуги AB выражается формулой $dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ или $dl = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$, а длина дуги AB вычисляется по формуле $L = \int_a^b dl = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx,$ где a и b–значения независимой переменной x в точках A и B.

Если кривая задана уравнением x = φ (y)(c y $\leq$ d), то длина дуги AB вычисляется по формуле $L = \int_c^d \sqrt{1+[\varphi'(y)]^2}dy,$ где с и д значения независимой переменной y в точках A и B.

6. Центр масс

Пример. Пусть вдоль стержня–отрезка [a;b] оси Ox – распределена масса плотностью ρ (x), где ρ (x) – непрерывная функция. Покажем, что а) суммарная масса M стержня равна $\int_a^b \rho(x)dx$; б) координата центра масс x′ равна $\frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx.$.

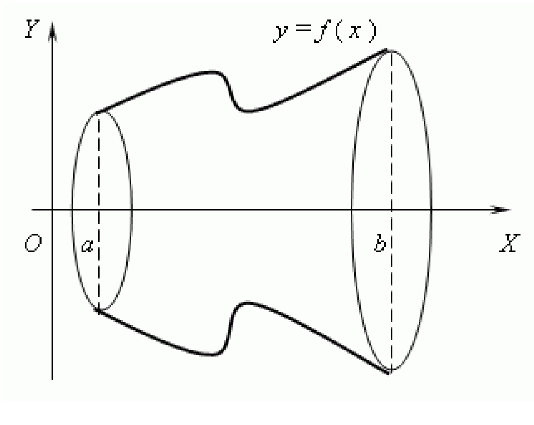
Таблица 1.2

Величины	Вычисление производной	Вычисление интеграла
A – работа; *F* – сила; *N* – мощность.	*F(x)=A′ (x);* *N(t)=A′ (t).*	A=$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$; A=$\int_{t_1}^{t_2} N(t)dt.$

m –масса тонкого стержня p – линейная плотность	P(x)=m' (x).	m=$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx.$
Q –электрический заряд; I – сила тока.	I(t)=q' (t)	Q=$\int_{l_1}^{l_2} I(t)dt$
S –перемещение; *v* –скорость.	V(t)=S' (t)	S=$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$
Q –количество теплоты; *c* – теплоёмкость.	C(t)=Q' (t)	Q=$\int_{t_1}^{t_2} c(t)dt$

Приложения определённого интеграла в геометрии

Объём тела вращения. Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f (x), прямыми x = a и x = b и осью OX



Объём *V* тела вращения вокруг оси *Ox* будет равен:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx\,.$$

Объём *V* тела вращениявокруг оси *Oy* будет равен:

$$V = \pi \int_a^b x^2 dx$$

Пример 1. Найти объём усечённого конуса, образованного вращением прямой y = x + 1 вокруг оси Ох и ограниченной x = 0 и x = 3 .

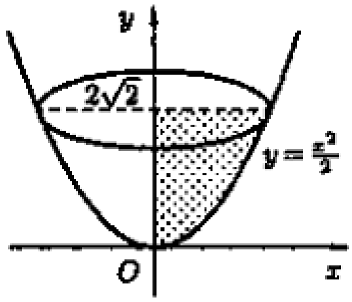
В соответствии с вышеприведенной формулой имеем:

$$V=\pi\int_0^3 (x+1)^2\,dx=\pi\int_0^3 (x^2+2x+1)\,dx=(x^3/3+x^2+x)\Big|_0^3=21.$$

Пример 2.Вычислите объём тела, полученного вращением кривой – графика функции y= sinx, x=0, x=п, вокруг оси Ох.

$$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2\,dx=\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)dx=\pi\left(\int_0^{\pi}dx-\int_0^{\pi}\frac{\cos 2x+1}{2}dx\right)=\pi\left(x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{x^2}{2}$, x=0, y=$2\sqrt{2}$ вокруг оси Оу.



Решение: $x=\sqrt{2y}$ $V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2y}\right)^2 dy=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}2ydy=\pi y^2\Big|_0^{2\sqrt{2}}=8\pi$

Контрольные вопросы:

1. Где применяется определенный интеграл?

2. Какие задачи можно решить с помощью определенного интеграла в физике?

3. Как найти путь, пройденный телом за определенное время?

4. Как вычислить работу тела?

5. Как найти объём тела вращения вокруг оси Ох или вокруг оси Оу?