

Уважаемые студенты

Вам необходимо выполнить задание:

1. Прочитать внимательно лекцию.
2. Составить краткий конспект по основным понятиям, обязательно в конспект записывать решение типовых задач.
3. Решить задания к лекции (при правильном решении 3-х задач получаете «3», при правильном решении 4-х задач получаете «4», при правильном решении 5-х задач получаете «5»).
4. Выполненное задание предоставить на проверку в виде фотоотчета в трехдневный срок на email: [xvsviv@rambler.ru](mailto:xvsviv@rambler.ru)

С уважением Светлана Ивановна Хвастова. Если возникнут вопросы, обращаться по телефону: +79591389311 (ватсап, телеграмм).

### **Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.**

Рассмотрим случай многократного повторения одного и того же испытания или случайного эксперимента. Результат каждого испытания будем считать не зависящим от того, какой результат наступил в предыдущих испытаниях. В качестве результатов или элементарных исходов каждого отдельного испытания будем различать лишь две возможности:  $\bar{A}$

- 1) появление некоторого события  $A$ ;
- 2) появление события  $\bar{A}$ , (события, являющегося дополнением  $A$ )

Пусть вероятность  $P(A)$  появления события  $A$  постоянна и равна  $p$  ( $0 < p < 1$ ). Вероятность  $P(\bar{A})$  события  $\bar{A}$  обозначим через  $q$ :  $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ .

Примерами таких испытаний могут быть:

- 1) подбрасывание монеты:  $A$  – выпадение герба;  $\bar{A}$  – выпадение цифры.

$$P(A) = P(\bar{A}) = 0,5.$$

- 2) бросание игральной кости:  $A$  – выпадение количества очков, равного пяти,  $\bar{A}$  – выпадение любого количества очков кроме пяти.

$$P(A) = 1/6, P(\bar{A}) = 5/6.$$

- 3) извлечение наудачу из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шара, одного шара (с возвращением):  $A$  – извлечение белого шара,  $\bar{A}$  – извлечение черного шара

$$P(A) = 0,7; P(\bar{A}) = 0,3$$

Пусть произведено  $n$  испытаний, которые мы будем рассматривать как один сложный

случайный эксперимент. Составим таблицу из  $n$  клеток, расположенных в ряд, пронумеруем клетки, и результат каждого испытания будем отмечать так: если в  $i$ -м испытании событие  $A$  произошло, то в  $i$ -ю клетку ставим цифру 1, если событие  $A$  не произошло (произошло событие  $\bar{A}$ ), в  $i$ -ю клетку ставим 0.

Если, например, проведено 5 испытаний, и событие  $A$  произошло лишь во 2-м и 5-м испытаниях, то результат можно записать такой последовательностью нулей и единиц: 0; 1; 0; 0; 1.

Каждому возможному результату  $n$  испытаний будет соответствовать последовательность  $n$  цифр 1 или 0, чередующихся в том порядке, в котором появляются события  $A$  и  $\bar{A}$  в  $n$  испытаниях, например:

1; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 0; ... 0; 1; 1; 0

⏟  
n цифр

Всего таких последовательностей можно составить  $2^n$  (это читатель может доказать сам).

Так как испытания независимы, то вероятность  $P$  каждого такого результата определяется путем перемножения вероятностей событий  $A$  и  $\bar{A}$  в соответствующих испытаниях. Так, например, для написанного выше результата найдем

$$P = p \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot q \cdot q \cdot \dots \cdot q \cdot p \cdot p \cdot q$$

Если в написанной нами последовательности единица встречается  $x$  раз (это значит, что нуль встречается  $n-x$  раз), то вероятность соответствующего результата будет  $p^x q^{n-x}$  независимо от того, в каком порядке чередуются эти  $x$  единиц и  $n-x$  нулей.

Все события, заключающиеся в том, что в  $n$  испытаниях событие  $A$  произошло  $x$  раз, а событие  $\bar{A}$  произошло  $n-x$  раз, являются несовместными. Поэтому для вычисления вероятности объединения этих событий (или суммы этих событий), нужно сложить вероятности всех этих событий, каждая из которых равна  $p^x q^{n-x}$ . Всего таких событий можно насчитать столько, сколько можно образовать различных последовательностей длины  $n$ , содержащих  $x$  цифр "1" и  $n-x$  цифр "0". Таких последовательностей получается столько, сколькими способами можно разместить  $x$  цифр "1" (или  $n-x$  цифр "0") на  $n$  местах, то есть число этих последовательностей равно  $C_n^x = C_n^{n-x}$

Отсюда получается формула Бернулли:

$$P_n(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

По формуле Бернулли рассчитывается вероятность появления события  $A$  " $x$ " раз в  $n$  повторных независимых испытаниях, где  $p$  – вероятность появления события  $A$  в одном испытании,  $q$  – вероятность появления события  $\bar{A}$  в одном испытании.

Сформулированные условия проведения испытаний иногда называются "схемой повторных независимых испытаний" или "схемой Бернулли"

Число  $x$  появления события  $A$  в  $n$  повторных независимых испытаниях называется частотой.

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, наудачу выбирается с возвращением 5 раз подряд один шар. Подсчитать вероятность того, что 4 раза появится белый

шар.

В приведенных выше обозначениях  $n=8$ ;  $p=1/4$ ;  $q=3/4$ ;  $x=5$ . Искомую вероятность вычисляем по формуле Бернулли:

$$P_8(5) = C_8^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{15}{1024}$$

По формуле Бернулли можно подсчитать вероятности всех возможных частот:  $x=0,1,2,3,4,5$ .

Заметим, что если в этой задаче считать, что белых шаров было 20000, а черных 60000, то очевидно  $p$  и  $q$  останутся неизменными. Однако в этой ситуации можно пренебречь возвращением извлеченного шара после каждой выборки (при не слишком больших значениях  $x$ ) и считать вероятности всех частот:  $x=0,1,2,\dots$  по формуле Бернулли.

Формула Бернулли при заданных числах  $p$  и  $n$  позволяет рассчитывать вероятность любой частоты  $x$  ( $0 \leq x \leq n$ ). Возникает естественный вопрос, какой частоте будет соответствовать наибольшая вероятность?

Предположим, что такая частота существует, и попытаемся ее определить из условия, что вероятность этой частоты не меньше вероятности "предыдущей" и "последующей" частот:

$$P_n(x) \geq P_n(x-1); P_n(x) \geq P_n(x+1) \quad (*)$$

Первое неравенство (\*) представляется в виде:

$$C_n^x p^x q^{n-x} \geq C_n^{x-1} p^{x-1} q^{n-x+1},$$

что эквивалентно  $\frac{q}{n-x+1} \leq \frac{p}{x}$  или  $qx \leq pn - px + p$ . Отсюда следует:

$$(p+q)x \leq np + p$$

$$x \leq np + p$$

Решая второе неравенство (1), получим

$$x \geq np - q$$

Таким образом, частота, имеющая наибольшую вероятность (наивероятнейшая частота), определяется двойным неравенством

$$np - q \leq x \leq np + p$$

Если  $np+p$  – целое число (тогда и  $np-q$  – целое число), то две частоты:  $x=np-q$  и  $x=np+p$  обладают наибольшей вероятностью.

### Задачи с решениями.

1. Каждый день акции корпорации ABC поднимаются в цене или падают в цене на один пункт с вероятностями соответственно 0,75 и 0,25. Найти вероятность того, что акции после шести дней вернуться к своей первоначальной цене. Принять условие, что изменения цены акции вверх и вниз – независимые события.

Решение. Для того, чтобы акции вернулись за 6 дней к своей первоначальной цене, нужно, чтобы за это время они 3 раза поднялись в цене и три раза опустились в цене. Искомая вероятность рассчитывается по формуле Бернулли

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0,13$$

2. Моторы многомоторного самолёта выходят из строя во время полёта независимо один от другого с вероятностью  $p$ . Многомоторный самолёт продолжает лететь, если работает не менее половины его моторов. При каких значениях  $p$  двухмоторный самолёт надёжнее четырёхмоторного самолёта?

Решение. Двухмоторный самолёт терпит аварию, если отказывают оба его мотора. Это происходит с вероятностью  $p^2$ . Четырёхмоторный самолёт терпит аварию, если выходят из строя все 4 мотора а это происходит с вероятностью  $p^4$ , либо выходят из строя три мотора из 4-х. Вероятность последнего события вычисляется по формуле Бернулли:  $C_4^3 p^3(1-p) = 4p^3(1-p)$ . Чтобы двухмоторный самолёт был надёжнее, чем четырёхмоторный, нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$p^2 < p^4 + 4p^3(1-p)$$

Это неравенство сводится к неравенству  $(3p-1)(p-1) < 0$ . Второй сомножитель в левой части этого неравенства всегда отрицателен (по условию задачи). Следовательно, величина  $3p-1$  должна быть положительной, откуда следует, что должно выполняться условие  $p > 1/3$ . Следует отметить, что если бы вероятность выхода из строя мотора самолёта превышала одну треть, сама идея использования авиации для пассажирских перевозок была бы очень сомнительной.

3. Бригада из десяти человек идёт обедать. Имеются две одинаковые столовые, и каждый член бригады независимо один от другого идёт обедать в любую из этих столовых. Если в одну из столовых случайно придёт больше посетителей, чем в ней имеется мест, то возникает очередь. Какое наименьшее число мест должно быть в каждой из столовых, чтобы вероятность возникновения очереди была меньше 0,15?

Решение. Решение задачи придётся искать перебором возможных вариантов. Сначала заметим, что если в каждой столовой по 10 мест, то возникновение очереди невозможно. Если в каждой столовой по 9 мест, то очередь возникнет только в случае, если все 10 посетителей попадут в одну столовую. Из условия задачи следует, что каждый член бригады выбирает данную столовую с вероятностью  $1/2$ . Значит, все соберутся в одной столовой с вероятностью  $2(1/2)^{10} = 1/512$ . Это число много меньше, чем 0,15, и следует провести расчёт для восьмиместных столовых. Если в каждой столовой по 8 мест, то очередь возникнет, если все члены бригады придут в одну столовую, вероятность этого события уже вычислена, или 9 человек пойдут в одну столовую, а 1 человек выберет другую столовую. Вероятность этого

события рассчитывается с помощью формулы Бернулли  $2C_{10}^9 (1/2)^9 (1/2) = 10/512$ . Таким образом, если в столовых по 8 мест, то очередь возникает с вероятностью  $11/512$ , что пока ещё меньше, чем 0,15. Пусть теперь в каждой из столовых по 7 мест. Кроме двух рассмотренных вариантов, в данном случае очередь возникнет, если в одну из столовых придёт 8 человек, а в

другую 2 человека. Это может произойти с вероятностью  $2C_{10}^8 (1/2)^8 (1/2)^2 = 45/512$ . Значит, в этом случае очередь возникает с вероятностью  $56/512 = 0,109375 < 0,15$ . Действуя аналогичным образом, вычисляем, что если в каждой столовой 6 мест, то очередь возникает с вероятностью  $56/512 + 120/512 = 176/512 = 0,34375$ . Отсюда получаем, что наименьшее число мест в каждой столовой должно равняться семи.

### Задачи для самостоятельного решения.

1. Пусть всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Чему равна вероятность того, что из 7 посеянных семян взойдут 5?

2. Если в семье четыре ребёнка, что вероятнее: это два мальчика и две девочки, или три ребёнка одного пола и один другого пола? Принять вероятность того, что данный ребёнок – мальчик, равной 0,5.

3. Капитан корабля перед высадкой десанта приказал выпустить по береговой полосе длиной 200 метров 20 реактивных снарядов, опасаясь замаскированных огневых точек. Вдоль берега в землю был врыт бункер длиной 20 метров.

а) Найти вероятность того, что 4 снаряда попали в бункер.

б) Найти наивероятнейшее число снарядов, попавших в бункер.

4. Примерно 70% клиентов банка расплачиваются по кредитам вовремя. а) Найти вероятность того, что из 20-ти случайным образом выбранных клиентов банка вовремя расплатятся по кредитам более 15-ти клиентов.

б) Найти наивероятнейшее число клиентов из выбранных 20-ти, которые вовремя погасят долги по кредитам.

с) Найти вероятность того, что именно наивероятнейшее число клиентов вовремя погасит долги по кредитам.

5. Предприятие производит полиэтиленовые бутылки. Пивной завод покупает их, наполняет и запускает в торговлю. При покупке бутылок на пивзаводе для контроля качества из партии отбирается случайным образом 10 бутылок. Если среди этих бутылок только две или менее оказываются дефектными, вся партия принимается и направляется в производство.

а) какова вероятность того, что вся партия будет принята, если предприятие–производитель выпускает 10% дефектных бутылок?

б) 20% дефектных бутылок?

с) 30% дефектных бутылок?

д) 40% дефектных бутылок?

Ответы. 1.  $\sim 0,124$ ; 2. Вероятность того, что три ребёнка одного пола, а один другого пола выше. 3. а)  $11160261 \cdot 10^{-9} \approx 0,0111$ ; б) 2. 4. а) 0,238; б) 14; с)  $\sim 0,192$ . 5. а) 0,93; б) 0,677; с) 0,382; д) 0,167.