Задание:

- Повторить теоретический материал;
- Используя методические рекомендации, решить практическую работу;
- Фотоотчёт прислать в течении 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Практическая работа

Тема: **Решение показательных уравнений и неравенств.**

Цель: Овладеть практическими навыками при решении показательных уравнений и неравенств .

Ход работы

1. Решение показательных уравнений способом приведения к общему основанию.
2. Решение показательных уравнений способом вынесения за скобки общего множителя.
3. Решение показательных уравнений способом приведения к квадратному уравнению, т.е. $Aa^{2x}+Ba^{x}+C=0$.
4. Решение показательных уравнений способом приведения к общему показателю.
5. Решение показательных неравенств.

Контрольные вопросы:

1. Имеет ли показательное уравнение $a^x=b$ решение , если $b < 0$?
2. В чем состоит способ приведения к общему основанию при решении показательных уравнений ?
3. В чем состоит способ вынесения за скобки общего множителя при решении показательных уравнений?
4. Как решаются показательные уравнения вида $Aa^{2x}+Ba^{x}+C=0$?
5. Какими свойствами показательной функции $y=a^x$ пользуются при решении показательных неравенств ?

Литература.

1. Богомолов М. В. Практические занятия по математике. –М.: Высшая школа, 1993.
2. Шкиль М.И. Алгебра и начала анализа.. – Зодиак ЭКО, 1999.
3. Яковлев Г. Н. Алгебра и начала анализа. – М.: Просвіта, 1990.

Методическое пособие:

1. Показательные уравнения.

Определение. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

1. $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$ - простейшее показательное уравнение
2. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a \neq 1$, $a > 0$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$
3. $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$ решается подстановкой $a^x = y$ и сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$

II. Показательные неравенства.

Определение. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

$$a^{f(x)} < a^{g(x)},\ a > 0,\ a \neq 1.$$

При $\underline{a > 1}$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) < g(x)$

при $\underline{0 < a < 1}$

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно $f(x) > g(x)$

III. Основные показательные тождества.

2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
3. $a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$
4. $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 x_2}$
5. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

6. если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$
7. если $a > 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$
8. если $0 < a < 1$ и $x_1 < x_2$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$
9. если $a < b$ и $x > 0$, то $a^x < b^x$
10. если $a < b$ и $x < 0$, то $a^x > b^x$

$$a^0 = 1; \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}; \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Рассмотрим некоторые типы решения показательных уравнений.

1. Решение показательных уравнений способом приведения к общему основанию, то есть уравнения вида $a^{f(x)}=b$.

а) $4^{7x-3}=256^x$ Представим правую часть уравнения как степень с основанием 4:
$4^{7x-3}=4^{4x}$
7x-3=4x
7x-4x=3
откуда 3x=3, x=1

б) $9^x=(\frac{1}{27})^{x-1}$ Представим обе части уравнения как степень с основанием 3:

$3^{2x}=3^{-3(x-1)}$ Приравняем показатели степеней в левой и правой частях.

$2x=-3(x-1)$

$2x=-3x+3$

$5x=3$, откуда $x=\frac{3}{5}$

в) $3^{x^2-x-2}=81$ Представим правую часть уравнения как степень с основанием 3:

$3^{x^2-x-2}=3^4$ Приравняем показатели степеней в левой и правой частях.

$x^2-x-2=4$

$x^2-x-6=0$ $D=b^2-4ac=25$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{1\pm 5}{2}$, $x_1=-2$, $x_2=3$.

г) $2^{x^2-7x+12}=1$ согласно формулы $a^0=1$ имеем

$2^{x^2-7x+12}=2^0$ $x^2-7x+12=0$ $D=b^2-4ac=1$, $x_{1,2}=\frac{7\pm 1}{2}$, $x_1=3$, $x_2=4$.

2. Решение показательных уравнений способом вынесения за скобки общего множителя.

$2^{x+2}+2^{x-2}=34$ согласно формулы $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$, $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$

$2^x\cdot 2^2+2^x\cdot 2^{-2}=34$

$2^x\left(4+\frac{1}{4}\right)=34$

$2^x\cdot\frac{17}{4}=34$

$2^x=34:\frac{17}{4}=34\cdot\frac{4}{17}$

$2^x=8$

$2^x=2^3$

$x=3$

3. Решение показательных уравнений способом приведения к квадратному уравнению, т.е. $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$.

$4^x+2^{x+1}-8=0$

$2^{2x}+2^x\cdot 2-8=0$

Пусть $2^x=y$, тогда $y^2+2y-8=0$ $D=b^2-4ac=4+32=36$ $y_1=2$, $y_2=-4$.

Получим два уравнения:

1) $2^x=2 \Rightarrow x=1$

2) $2^x=-4$ – не имеет решения, так как показательная функция не может принимать отрицательные значения.

4. Решение показательных уравнений способом приведения к общему показателю.

$\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$

Представим произведение в левой части уравнения к общему показателю x. имеем:

$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{3}{4}\right)^3$ откуда

5. Решение показательных неравенств.

Определение. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным. $a^{f(x)}<a^{g(x)},\ a>0,\ a\neq 1.$

При $\underline{a>1}$

$a^{f(x)}<a^{g(x)}$ равносильно $f(x)<g(x)$

при $\underline{0<a<1}$

$a^{f(x)}<a^{g(x)}$ равносильно $f(x)>g(x)$

Решить неравенства:

1) $3^{2-x}>27$

$3^{2-x}>3^3$

так как a=3 и 3 > 1, тогда

$2-x>3$

$-x>1$

$x<-1$, тобто $x\in(-\infty;-1)$

2) $0{,}5^{5-2x}<8$

зная что $8=0{,}5^{-3}$, перепишем

$0{,}5^{5-2x}<0{,}5^{-3}$

так как a = 0,5 и 0 < 0,5 < 1, тогда

$5-2x>-3$

$-2x>-8$

$x<4$, то есть $x\in(-\infty;4)$

Задания для самостоятельной работы

№ п/п	Ф.И.О.	Вариант
1	Воробьев Никита Игоревич	1
2	Гранчак Эльвира Владимировна	2
3	Дубина Виктория Витальевна	3
4	Зорина Анна Васильевна	4
5	Косынская София Андреевна	1
6	Кравцова Татьяна Владимировна	2
7	Лысенко Елизавета Юрьевна	3
8	Овсиенко Кирилл Петрович	4
9	Рудой Александр Витальевич	1
10	Шпичко Ольга Александровна	2
11	Молоток Елена Владимировна	3

Вариант 1

1.Решить уравнения

а) $2^{x+3} * 2^{x-1} = 1;$

б) $2^{x+3} - 2^{x+1} = 12;$

в) $4 * 2^{2x} - 5 * 2^{x} + 1 = 0;$

г) $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27};$

2.Решить неравенства:

а) $0{,}9^{12x+2} < 0{,}81^{x};$

б) $3^{x-1} + 3^{x+2} \leq 252;$

Вариант 2

1.Решить уравнения

а) $0{,}2^{x^2+4x-5} = 1;$

б) $3^{x} + 4 * 3^{x+1} = 13;$

в) $3^{2x} - 9 * 3^{x} + 8 = 0;$

г) $6^{3x} * \frac{1}{6} = 6 * \left(\frac{1}{6}\right)^{2x}$;

2.Решить неравенства:

а) $3^{x+2} + 3^{x-1} \geq 28;$

б) $3^{7x+8} \geq 27^{x}$

Вариант 3

1.Решить уравнения

а) $0{,}5^{x+7} * 0{,}5^{1-2x} = 2;$

б) $7^{x} - 7^{x-1} = 6;$

в) $5^{2x} - 5^{x} - 600 = 0;$

г) $1{,}5^{x^2-3x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3};$

2.Решить неравенства:

а) $0{,}027^{2x} > 0{,}3^{2x+6};$

б) $4^{x+3} - 4^{x-1} \geq 255;$

Вариант 4

1.Решить уравнения

а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-2} = \frac{1}{7};$

б) $3^{x+2} + 3^{x-1} = 28;$

в) $13^{2x} + 3 * 13^{x} + (-4) = 0;$

г) $100^{x^2-1} = 10^{1-5x};$

2.Решить неравенства:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{7x-4} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^{3x};$

б) $2^{x+3} - 2^{x-1} \leq 15;$