Уважаемые студенты!

Задание:

1. Прочтите приведенный ниже конспект лекции.
2. Напишите конспект лекции в тетрадь объемом не менее 4-5 страниц рукописного текста.
3. Решите письменно приведенные ниже примеры для самостоятельной работы.
4. Конспект лекции и решенные примеры в письменном виде предоставить преподавателю по окончанию карантина.
5. Фотоотчет конспекта лекции предоставить на электронную почту hvastov@rambler.ru, при возникновении вопросов обращаться по телефону 0721098278 (WatsApp).

Лекция.

Тема: Определённый интеграл. Формула Ньютона - Лейбница.

План

1. Понятие определённого интеграла.
2. Основные свойства определённого интеграла.
3. Непосредственное вычисление определённого интеграла.

<u>Понятие определенного интеграла.</u>

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на промежутке $a \le x \le b$. Разобьем этот отрезок на **n** частей точками $a = x_0 < x_1 < x_{21} < x_3 \ldots < x_n =$ b. Выберем на каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ произвольным образом точку и обозначим их c_i, а длину отрезков через Δx_i и составим сумму:

$$f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x_1$$, которая

называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$.

Очевидно эта сумма зависит от того как разбит отрезок $[a;b]$ и от того как выбраны точки c_i.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремиться к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,,$$

где число a называется **нижним пределом** интегрирования, число b называется **верхним пределом** интегрирования, отрезок $[a;b]$ - **отрезком интегрирования.**

Для любой функции $f(x)$ непрерывной на отрезке $[a;b]$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Основный свойства определенного интеграла.

Все свойства сформулированы в предложении, что рассматриваемые функции интегрируемы в соответствующих отрезках.

1. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:*

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. *При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

5. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:*

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \right) dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

<u>Непосредственное вычисление определенного интеграла.</u>

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула ***Ньютона-Лейбница:***

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \,|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений любой первообразной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Из этой формулы виден порядок вычисления определенного интеграла:

1) *Найти неопределенный интеграл от данной функции:*

2) *В полученную первообразную подставить вместо аргумента сначала верхний, затем нижний предел интеграла;*

3) *Из результата подстановки верхнего предела вычесть результат подстановки нижнего предела.*

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx$.

Решение:

Применив указанное правило, вычислим данный интеграл:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} xdx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}x^2\Big|_{-\frac{1}{2}}^{4} = \frac{1}{2}\left(4^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(16 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{63}{4} = \frac{63}{8} = 7\frac{7}{8}.$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение:

Воспользуемся определением степени с дробным и отрицательным показателем и вычислим определенный интеграл:

$$\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Big|_1^8 = 3\sqrt[3]{x}\,\Big|_1^8 = 3\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{1}\right) = 3(2-1) = 3.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$.

Решение:

Интеграл от разности функций заменим разностью интегралов от каждой функции:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx = tgx\,|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\cos x\,|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}= tg\frac{\pi}{4}-tg\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1-(-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2$$

Контрольные вопросы:

1. Что такое определенный интеграл?
2. Перечислимте основные свойства определенного интеграла?
3. Напишите основные формулы интегрирования (табличные интегралы).
4. Что понимают под непосредственным интегрированием определенного интеграла?

Упражнения

1. $\int_1^4 \frac{dx}{3x-2}$
2. $\int_0^2 3^x dx$
3. $\int (1+2x+3x^2)dx$
4. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$
5. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
6. $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx$
7. $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}$
8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$
9. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{dx}{x}$
10. $\int_{-1}^{1} \frac{2^x-3^x}{6^x}dx$
11. $\int \frac{e^x+e^{-1}}{e^{x-1}}dx$
12. $\int_{-2}^{-1} (x+\frac{1}{3x^5}+\frac{1}{2})dx$
13. $\int_0^1 (e^x+x)dx$
14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\cos x+\sin x)dx$
15. $\int_1^2 \frac{1+x^7}{x^6}dx$
16. $\int_1^{16} (\sqrt{x}-2)dx$
17. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2\cos^2 x}$