Уважаемые студенты!

- Изучите теоретический материал;
- Написать краткий конспект;
- По вопросам обращаться 072-1098278 или hvastov@rambler.ru
- Фотоотчёт конспекта прислать в течение 3 дней со дня получения задания на hvastov@rambler.ru

Методы решения показательных уравнений и неравенств

1.1. Показательные уравнения

Показательным уравнением называется уравнение, содержащее переменную в показателе степени $a^x = b$.

Например: $6^x = 1$

Простейшим показательным уравнением называется уравнение вида:

$$a^{f(x)} = b.$$

Показательное уравнение:

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)}$;
2. $ka^{2f(x)} + ba^{f(x)} + c = 0, a^{f(x)} = y$;
3. $a^{f(x)} = g(x), y = a^{f(x)}, y = g(x)$.

При решении показательных уравнений необходимо помнить, что решение любого показательного уравнения сводится к решению простейших показательных уравнений.

Методы решения показательных уравнений:

- Метод уравнивания показателей;
- Метод введения новой переменной;
- Метод вынесения общего множителя за скобки;
- Функционально-графический метод;
- Метод почленного деления;
- Метод группировки.

1.1.1. Метод уравнивания показателей

Алгоритм решения уравнения методом уравнивания показателей:

- Представить обе части показательного уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями;
- На основании теоремы, если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению вида $f(x) = g(x)$, приравниваем показатели степеней;
- Решаем полученное уравнение, согласно его виду (линейное, квадратное и т.д.);
- Записываем ответ.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$3^x = 27$$

Представим 27 как 3^3. Наше показательное уравнение имеет одинаковое основание 3.

$$3^x = 3^3$$

Данное уравнение равносильно уравнению

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 2.

Решить уравнение:

$$5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}$$

Заданное уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 3x = 3x - 8.$$

Далее имеем:

$$x^2 - 6x + 8 = 0;$$
$$x_1 = 2, x_2 = 4.$$

Пример 3.

Решить уравнение:

$$(0{,}2)^{x-0{,}5} \cdot (0{,}2)^{0{,}5} = (0{,}2)^{-1} \cdot ((0{,}2)^2)^{x-1}$$

Упростим показательное уравнение

$$(0{,}2)^x = (0{,}2)^{2x-3}$$

Далее имеем:

$$x = 2x - 3$$
$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$.

1.1.2. Метод введения новой переменной

Алгоритм решения показательного уравнения методом введения новой переменной:

- Определить возможность переписать данное уравнение в новом виде, позволяющем ввести новую переменную;
- Вводим новую переменную;
- Решаем уравнение относительно новой переменной;
- Записываем ответ.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, перепишем заданное уравнение в виде

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Есть смысл ввести новую переменную: $y = 2^x$, $y > 0$; тогда уравнение примет вид:

$$y^2 + 2y - 24 = 0$$

Решив квадратное уравнение относительно y, находим:

$$y_1 = 4;\ y_2 = -6$$

Но $y = 2^x$, значит, нам остаётся решить два уравнения:

$$2^x = 4;\ 2^x = -6$$

Из первого уравнения находим: $x = 2$; второе уравнение не имеет корней, поскольку при любых значениях x выполняется неравенство $2^x > 0$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2.
Решить уравнение:
$$2^{2x} + 2^x - 2 = 0$$
Пусть $2^x = t, t > 0$. Получаем квадратное уравнение:
$$t^2 + t - 2 = 0$$
Находим его корни:
$$t_1 = 1, t_2 = -2 - \text{не удовлетворяет условию } t > 0$$
$$2^x = 1$$
$$x = 0$$
Ответ: $x = 0$.
Пример 3.
Решить уравнение:
$$3^x + 3^{1-x} = 4$$
Преобразуем:
$$3^x + \frac{3^1}{3^x} = 4$$
Пусть $3^x = a, a > 0$.
$$a + \frac{3}{a} - 4 = 0$$
$$a^2 - 4a + 3 = 0$$
Находим корни квадратного уравнения:
$$a_1 = 3;\ a_2 = 1$$
$$3^x = 3;\ 3^x = 1$$
$$x = 1; x = 0$$
Ответ: $x = 1; x = 0$.

1.1.3. Метод вынесения общего множителя за скобки

Решение показательных уравнений методом вынесения общего множителя за скобки.
Пример 1.
Решить уравнение:
$$3^x + 3^{x+1} = 108$$
Т.к. 3^{x+1} равносильно $3^x \cdot 3$, запишем как
$$3^x + 3^x \cdot 3 = 108$$
Вынесем 3^x за скобку
$$3^x \cdot (1 + 3) = 108$$
$$3^x \cdot 4 = 108$$
$$3^x = \frac{108}{4} = 27$$
27 представим как 3^3, получим:
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
Ответ: $x = 3$.

Пример 2.
Решить уравнение:
$$6^{x-2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{3-x}+36^{\frac{x-1}{2}}=246$$
Преобразуем уравнение:
$$6^{x-2}-6^{-3+x}+6^{\frac{2x-2}{2}}=246$$
$$6^{x-2}-6^{x-3}+6^{x-1}=246$$
Вынесем 6^{x-3} за скобку
$$6^{x-3}(6-1+6^2)=246$$
$$6^{x-3}\cdot 41=246$$
$$6^{x-3}=6$$
$$x-3=1$$
$$x=4$$
Ответ: $x=4$.

Пример 3.
Решить уравнение:
$$3^{3x+1}-4\cdot 27^{x-1}+9^{1,5x-1}-80=0$$
Преобразуем уравнение:
$$3^{3x+1}-4\cdot 3^{3x-3}+3^{3x-2}=80$$
Вынесем 3^{3x-3} за скобку
$$3^{3x-3}(3^4-4+3)=80$$
$$3^{3x-3}\cdot 80=80$$
$$3^{3x-3}=1$$
$$3x-3=0$$
$$x=1$$
Ответ: $x=1$.

1.1.4. Функционально-графический метод

Алгоритм:
- Левую и правую части уравнения представить в виде функций;
- Построить графики обеих функций в одной системе координат;
- Найти точки пересечения графиков, если они есть;
- Указать абсциссы точек пересечения, это корни уравнения.

Пример 1.
Решить уравнение:
$$3^{2x}=10-x$$
Строим таблицы значений:

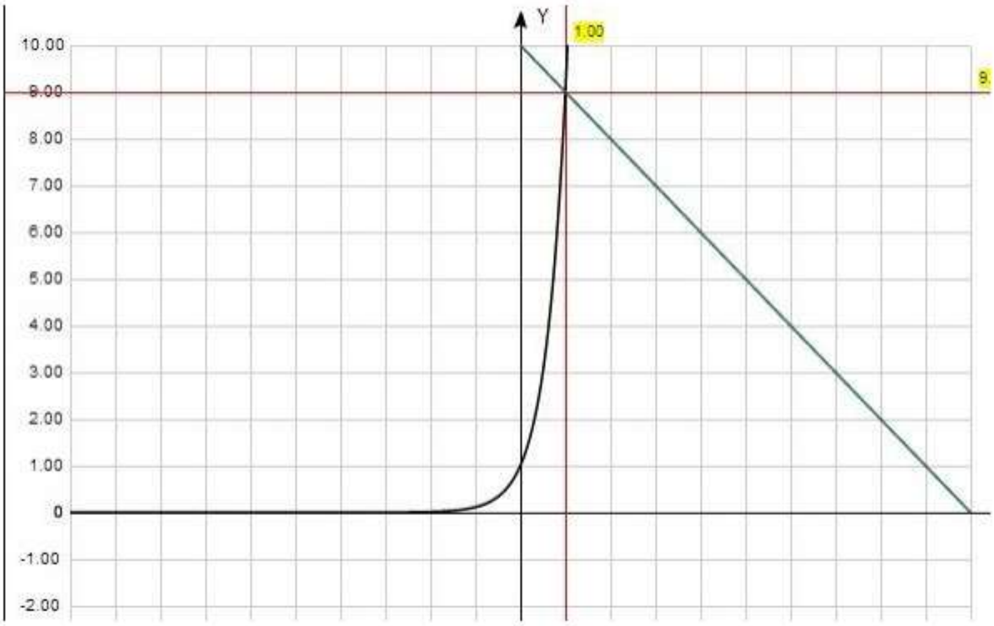
$y=3^{2x}$

x	0	1	-1
y	1	9	1/3

$$y = 10 - x$$

x	0	10
y	10	0

Построив графики этих функций, найдём абсциссу точки пересечения, она и будет корнем уравнения $x = 1$.



Ответ:$x = 1$.

1.1.5. Метод почленного деления

Данный метод заключается в том, чтобы разделить каждый член уравнения, содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Этот метод применяется для решения однородных показательных уравнений.

<u>Пример 1.</u>

Решить уравнение:

$$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^x - 7 \cdot 10^x = 0$$

Преобразуем уравнение:

$$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 2^x \cdot 5^x = 0$$

Для того, чтобы решить данное показательное уравнение разделим его на $5^{2x} > 0$, получим:

$$3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} + 2 - 7 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x = 0$$

Далее это уравнение можем решить методом введения новой переменной. Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y, y > 0$, тогда

$$3y^2 - 7y + 2 = 0$$

$$y_1 = 2 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = 2 \qquad x_1 = \log_{2/5} 2$$
$$y_2 = \frac{1}{3} \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \log_{2/5} 3$$
Ответ: $x_1 = \log_{2/5} 2, x_2 = \log_{2/5} 3$.

<u>Пример 2.</u>

Решить уравнение:
$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$
Преобразуем уравнение:
$$3 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2x} = 0$$
Разделим данное показательное уравнение на $4^{2x} > 0$, получим:
$$3 - 5 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} = 0$$
Вводим новую переменную. Пусть $\left(\frac{9}{4}\right)^x = a, a > 0$.
$$2a^2 - 5a + 3 = 0$$
$$a_1 = 1 \qquad \left(\frac{9}{4}\right)^x = 1 \qquad x_1 = 0$$
$$a_2 = \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{9}{4}\right)^x = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$
Ответ: $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$.

<u>Пример 3.</u>

Решить уравнение:
$$125^x + 20^x = 2^{3x+1}$$
Преобразуем уравнение:
$$5^{3x} + 5^x \cdot 2^{2x} = 2^{3x} \cdot 2$$
Разделим данное показательное уравнение на $5^{3x} > 0$, получим:
$$1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{3x} = 0$$
Вводим новую переменную. Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = a, a > 0$.
$$2a^3 - a^2 - 1 = 0$$
$$2a^3 - 2a^2 + a^2 - 1 = 0$$
$$2a^2(a-1) + (a-1)(a+1) = 0$$
$$(a-1)(2a^2 + a + 1) = 0$$
$$a = 1 \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^x = 1 \qquad x = 0$$
Ответ: $x = 0$.

1.1.6. Метод группировки

Способ группировки заключается в том, чтобы собрать степени с разными основаниями в разных частях уравнения, а затем разделить обе части уравнения на одну из степеней.

Пример 1.

Решить уравнение:

$$3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} - 6 \cdot 4^{x+1} = -\frac{1}{3} \cdot 9^{x+2}$$

Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\frac{1}{2} \cdot 9^{x+1} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 9^{x} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 9^{x} \cdot 9^{2} = 6 \cdot 4^{x} \cdot 4 - 3 \cdot 4^{x}$$

$$4{,}5 \cdot 9^{x} + 27 \cdot 9^{x} = 24 \cdot 4^{x} - 3 \cdot 4^{x}$$

$$9^{x}(4{,}5 + 27) = 4^{x} \cdot 21$$

$$9^{x} \cdot 31{,}5 = 4^{x} \cdot 21$$

Разделим данное показательное уравнение на $9^{x} > 0$, получим:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x} = \frac{3}{2}$$

$$2x = -1$$

$$x = -0{,}5$$

Ответ: $x = -0{,}5$.

Пример 2.

Решить уравнение:

$$5 \cdot 7^{x-1} + 4 \cdot 3^{x} + 3^{x+1} - 2 \cdot 7^{x} = 0$$

Сгруппируем слагаемые:

$$4 \cdot 3^{x} + 3^{x+1} = 2 \cdot 7^{x} - 5 \cdot 7^{x-1}$$

$$3^{x-1}(4 \cdot 3 + 3^{2}) = 7^{x-1}(2 \cdot 7 - 5)$$

$$3^{x-1} \cdot 21 = 7^{x-1} \cdot 9$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1} = \frac{9}{21}$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 3.

Решить уравнение:

$$3 \cdot 5^{-(4x+3)} - 2^{1-4x} + 5^{-(4x+2)} - 2^{-4x-1} = 0$$

Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$3 \cdot 5^{-4x-3} + 5^{-4x-2} = 2^{-4x+1} + 2^{-4x-1}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$5^{-4x-3}(3 + 5) = 2^{-4x-3}(2^{4} + 2^{2})$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-4x-3} = \frac{20}{8}$$

$$-4x - 3 = 1$$

$$x = -1$$

Ответ: $x = -1$.

1.2. Показательные неравенства

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными.

На основании вышесказанного приведём методику решения показательных неравенств. Методы решения показательных неравенств во многом дублируют способы решения показательных уравнений. Поэтому выделим только их особенности.

1.2.1. Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Решение неравенств подобного вида основано на следующих утверждениях:

- Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$;
- Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Заметим, что применяя какой-либо метод при решении неравенства, содержащего знак " $>$ ", можно этот же метод применять и при решении неравенств, содержащих знаки " $<$ ", " $\geq$ ", " $\leq$ ".

Пример 1.

Решить неравенство:

$$2^x < \frac{1}{8}$$

Поскольку $\frac{1}{8} = 2^{-3}$, то $2^x < 2^{-3}$, т.к. $2 > 1$, функция $y = 2^t$ - возрастает

$$x < -3$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$.

Пример 2.

Решить неравенство:

$$2^{x^2} > 2^{x+2}$$

$x^2 > x + 2$, т.к. $2 > 1$ функция $y = 2^t$ – возрастает

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$x < -1, x > 2$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3.

Решить неравенство:

$$(0{,}5)^{x^2} \cdot 2^{2x+2} \leq 8^{-2}$$

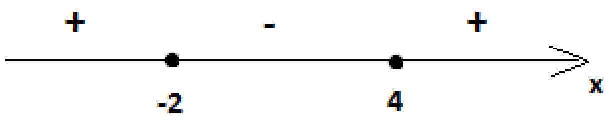
Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x+2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$x^2 - 2x - 2 \geq 6$, т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$ функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$ – убывает

$$(x - 4)(x + 2) \geq 0$$



Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$.

1.2.2. Неравенства вида $\boldsymbol{a^{f(x)} > b, a > 0}$

Необходимо рассмотреть два случая:

- $b \le 0$, тогда $a^{f(x)} > b \leftrightarrow x \in D(f)$
- $b > 0$, тогда $a^{f(x)} > b \leftrightarrow f(x) > \log_a b$ при $a > 1$;

$$a^{f(x)} > b \leftrightarrow f(x) < \log_a b \text{ при } 0 < a < 1.$$

При $a = 1$ исходное неравенство $a^{f(x)} > b$ равносильно числовому неравенству $1 > b$ при $x \in D(f)$.

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$$2^x > 5$$
$$2^x > 2^{\log_2 5}$$
$$x > \log_2 5$$

Ответ: $x \in (\log_2 5\,; +\infty)$.

<u>Пример 2.</u>

Решить неравенство:

$$3^x < 6$$
$$3^x < 3^{\log_3 6}$$
$$x < \log_3 6$$

Ответ: $x \in (-\infty; \log_3 6)$.

1.2.3. Неравенства вида $\boldsymbol{a^{f(x)} > b^{g(x)}}$

При решении неравенств подобного вида применяют логарифмирование обеих частей по основанию a или b. Учитывая свойства показательной функции, получаем:

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) > g(x) \log_a b$, если $a > 1$;

$a^{f(x)} > b^{g(x)} \leftrightarrow f(x) < g(x) \log_a b$, если $0 < a < 1$.

<u>Пример 1.</u>

Решить неравенство:

$$2^x \ge 3^{x^2}$$

Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 2. Тогда имеем:

$$\log_2(2^x) \ge \log_2\left(3^{x^2}\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \ge x^2 \log_2 3 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x = x^2 \log_2 3 \ge 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x(1 - x \log_2 3) \ge 0 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in \left[0; \frac{1}{\log_2 3}\right] = [0; \log_2 3]$$

Ответ: $x \in [0; \log_2 3]$.

1.2.4. Метод рационализации

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $f(x)$ на более простое выражение $g(x)$, при которой неравенство $g(x) \vee 0$ равносильно неравенству $g(x) \vee 0$ в области определения выражения $f(x)$. Под знаком $\vee$ подразумевается один из знаков $>, <, \geq, \leq$.

Таблица для рационализации в показательных неравенствах:

$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
$h^f \vee 1$	$(h-1) \cdot f \vee 0$
$f^h \vee g^h$	$(h-g) \cdot h \vee 0$
$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$

f, g - функции от x,

h - функция или число,

$\vee$ - один из знаков $>, <, \geq, \leq$.

Таблица работает при условии $h > 0$, $h \neq 1$. Также в третьей, четвёртой строках – дополнительно - $f \geq 0$, $g \geq 0$.

Пример 1.

Решить неравенство:

$$3^{x^2+3x-4} < 3^{5-x}$$

Решение исходного неравенства равносильно решению неравенства:

$$(3-1)\left(x^2+3x-4-(5-x)\right) < 0.$$

$$x^2+4x-9 < 0$$

$$\left(x-\left(-2-\sqrt{13}\right)\right)\left(x-\left(-2+\sqrt{13}\right)\right) < 0$$

Ответ: $x \in \left(-2-\sqrt{13}; -2+\sqrt{13}\right)$.

1.3. Системы показательных уравнений

При решении систем уравнений, содержащих показательные функции, чаще всего используют традиционные методы решения систем уравнений: метод подстановки и метод замены переменных.

Напомним, что систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = g_1(x,y) \\ f_2(x,y) = g_2(x,y) \end{cases}$$

Несколько уравнений с двумя (или более) переменными образуют систему уравнений, если ставится задача найти множество общих решений этих уравнений.

Множество упорядоченных пар, точек (в случае систем с тремя переменными) и т.д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы, называется решением системы уравнений.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Система уравнений называется определенной, если она имеет конечное число решений, и неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений.

Две системы называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений.

Пример 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5^x \cdot 3^y = 16 \\ 5^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{y}{2}} = 2 \end{cases}$$

Сделаем замену: $5^{\frac{x}{2}} = t$; $3^{\frac{y}{2}} = z$, получим систему:

$$\begin{cases} t^2 - z^2 = 16 \\ t - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-z)(t+z) = 16 \\ t - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(t+z) = 16 \\ t - z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + z = 8 \\ t - z = 2 \end{cases}$$

$$2t = 10$$

$$t = 5, z = 3$$

Обратная замена: $5^{\frac{x}{2}} = 5$; $3^{\frac{y}{2}} = 3$

$$\frac{x}{2} = 1, \frac{y}{2} = 1$$

$$x = 2, y = 2$$

Ответ: (2;2).

Пример 2.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 162 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases}$$

Перемножим уравнения данной системы. Получим:

$$\begin{cases} 6^x \cdot 36^y = 162 \cdot 48 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 6^{x+2y} = 6^5 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3^x \cdot 4^y = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 3^{5-2y} \cdot 4^y = 48 \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ \dfrac{3^5 \cdot 4^y}{9^y} = 48 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^y = \dfrac{48}{3^5} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ \left(\dfrac{4}{9}\right)^y = \left(\dfrac{4}{9}\right)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ответ: (1;2).

1.4. Системы неравенств. Совокупность неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств (т.е. если отыскиваются все общие решения исходных неравенств).

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств.

Две системы неравенств называются равносильными, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам.

Очевидно, что решением системы неравенств является пересечение решений неравенств, образующих систему, а решением совокупности неравенств является объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Несколько неравенств с одной переменной образуют совокупность неравенств, если, ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, каждое из которых удовлетворяет, по крайней мере, одному из этих неравенств.

<u>Пример 1.</u>

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x \leq 0 \\ \left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\frac{27}{125}\right)^x} \end{cases}$$

Решаем каждое из неравенств по отдельности.

1) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x \leq 0$

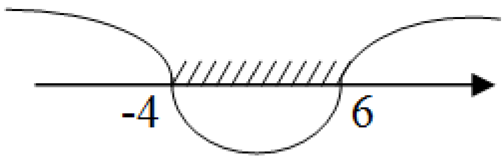
Домножим неравенство на 6, получим:

$$6^{2x} - 2 \cdot 6^x - 24 \leq 0$$

Произведём замену: $6^x = t$

$$t^2 - 2t - 24 \leq 0$$

$$t_1 = -4;\ t_2 = 6$$



$$-4 \leq t \leq 6$$

Обратная замена: $-4 \leq 6^x \leq 6$

$$x \leq 1$$

2) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\frac{27}{125}\right)^x}$

$$\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)^x \cdot \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}\right)^{x-2} > \sqrt{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^3\right)^x}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x+2} > \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{3x}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3x}{2}}$$

$x + 2 < \frac{3x}{2}$, т.к. $0 < \frac{3}{5} < 1$ функция $y = \left(\frac{3}{5}\right)^t$ – убывает

$$2x + 4 < 3x$$

$$x > 4$$

3) $\begin{cases} x \le 1 \\ x > 4 \end{cases}$

Ответ: решений нет.

Глава 2. Показательные уравнения и неравенства и их системы в ЕГЭ

Анализируя задания ЕГЭ, можно сделать вывод о том, что задачи на решение показательных уравнений могут встречаться в любой части заданий ЕГЭ. В первой части обычно предлагают решить простейшие показательные уравнения. Во второй части можно встретить более сложные показательные уравнения, решение которых обычно является одним из этапов выполнения задания. Уравнения во второй части могут быть и комбинированные, т.е. быть и показательными, и рациональными, и иррациональными, и тригонометрическими, и логарифмическими и т.д.

Разобранные выше методы решения показательных уравнений и неравенств применяются в решении заданий ЕГЭ.

Рассмотрим образцы вариантов ЕГЭ по математике 2014 года, а конкретно задание С3:

1) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5^x - 1} + \dfrac{5^x - 2}{5^x - 3} \ge 2 \\ \left(\dfrac{2}{25x^2 - 10x - 8} + \dfrac{25x^2 - 10x - 8}{2}\right)^2 \ge 4 \end{cases}$$

Разберём решение первого неравенства системы. Сделаем замену $z = 5^x$, $z > 0$, получаем:

$$\frac{2}{z-1} + \frac{z-2}{z-3} \ge 2$$

$$\frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)} \le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 1 < z \le 2 \\ 3 < z \le 5 \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x \le \log_5 2 \\ \log_5 3 < x \le 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0;\ \log_5 2] \cup (\log_5 3\,; 1]$.

2) Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 25^{x^2 - x} - 30 \cdot 5^{x^2} + 5^{2x+3} \ge 0 \\ \log_{4x} 2x + \log_{2x^2} 4\,x^2 \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Разберём решение первого неравенства системы. Поскольку $25^{x^2-x}=5^{2x^2-2x}$, перепишем это неравенство так:

$$5^{2x^2-2x}-30\cdot 5^{x^2}+5^{2x+3}\geq 0$$

Разделим обе части последнего неравенства на $5^{2x+3}>0$:

$$5^{2x^2-2x-2x-3}-30\cdot 5^{x^2-2x-3}+1\geq 0$$

$$125\cdot 5^{2x^2-4x-6}-30\cdot 5^{x^2-2x-3}+1\geq 0$$

Введем новую переменную. Пусть $5^{x^2-2x-3}=t,\, t>0$. Тогда:

$$125t^2-30t+1\geq 0$$

$$t^2-\frac{6}{25}t+\frac{1}{125}\geq 0$$

$$t^2-\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\right)t+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{5}\geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t\leq \dfrac{1}{25} \\ t\geq \dfrac{1}{5} \end{array}\right.$$

Перейдём к переменной x:

$5^{x^2-2x-3}\leq 5^{-2}$ или $5^{x^2-2x-3}\leq 5^{-1}$

$x^2-2x-3\geq 0$ или $x^2-2x-2\geq 0$

$1-\sqrt{1+1}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$ или $\left[\begin{array}{l} x\leq 1-\sqrt{1+2} \\ x\geq 1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Ответ: $x\in\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$.